

A busca pela teoria de tudo: uma introdução elementar

Edval J. P. Santos

Laboratório de Dispositivos e Nanoestruturas, Núcleo de Engenharia na Escala Nanométrica, UFPE, Recife, Brasil.^{a)}

(Dated: 22 September 2023)

Essa é uma introdução elementar à busca pela teoria de tudo. Uma espécie de passeio turístico. Apresenta-se inicialmente as equações de James Clerk Maxwell com monopólos magnéticos como elaboradas por Paul Adrien Maurice Dirac. Antes de prosseguir é necessário fazer um rápido passeio pela Teoria da Relatividade. Em seguida mostra-se como as equações de Maxwell podem ser escritas de forma compacta na notação relativística. Essas equações representam a primeira grande unificação das leis da Natureza. Em seguida apresenta-se a ideia de Theodor Franz Eduard Kaluza e Oskar Benjamin Klein que introduz a quinta dimensão para unificar eletromagnetismo com gravitação. O espaço-tempo tem quatro dimensões e a “gravidade” na quinta dimensão é percebida nas outras dimensões como eletromagnetismo. Essa ideia é a base das teorias modernas de unificação inclusive a teoria da corda que utiliza dez dimensões. Para apresentar a teoria da corda introduz-se a corda relativística para obter a ação de Yoichiro Nambu e Tet-suo Goto. Apresenta-se a teoria quântica no contexto da integral do caminho como utilizada por Richard Phillips Feynman. Finalmente discute-se a quantização da corda e como surge a teoria-M proposta por Edward Witten na busca pela teoria de tudo.

Keywords: Eletromagnetismo, Teoria quântica, Ação, Teoria da corda.

“You see, ya can’t please everyone so ya got to please yourself” (Rick Nelson em Garden Party, 1972). Este texto é dedicado aos 25 anos do Laboratório de Dispositivos e Nanoestruturas. Também é um esforço incompleto para responder a pergunta da estudante Maria Augusta do Rego Barros Fernandes Lima: “O que é a teoria da corda?”.

I. INTRODUÇÃO

Os fenômenos naturais sempre capturaram a imaginação humana. Pode-se imaginar há dezenas de milhares de anos atrás o homem primitivo admirado ou assustado com o nascer do Sol, a luz da Lua, as estrelas, o meteoro, a chuva, o furacão, o fogo, o terremoto, o mar, o frio, a neve, etc. A partir da observação tenta-se elaborar os mais diversos tipos de explicação. Há apenas 1000 atrás surgiu o método científico elaborado por Abu Ali al-Hasan Ibn Al-Haytham (965-1040), em Latim é conhecido como Al-Hazen. O método científico é o maior patrimônio da civilização. Esse método em conjunto com a óptica de Al-Hazen e a Matemática árabe foi utilizado por Galileu di Vincenzo Bonaulti de Galilei (1564-1642) para mudar a compreensão sobre o Universo a nossa volta. Desde então o progresso científico não só aumentou nossa compreensão do universo como contribuiu para o avanço tecnológico.

O texto está organizado em seis seções. Sendo essa introdução a primeira parte. Na segunda seção apresenta-se o processo de unificação das leis do eletromagnetismo. Na terceira seção apresenta-se a ação e a corda relativística. Na quarta seção apresenta-se a teoria quântica. Na quinta seção tem-se a apresentação resumida da busca pela teoria M-brana para que possa ser utilizada como a teoria de tudo. Na última seção, apresenta-se algumas considerações.

^{a)}Electronic mail: edval@ee.ufpe.br or e.santos@expressmail.dk; <http://www.ee.ufpe.br>.

II. UNIFICAÇÃO DAS LEIS DO ELETROMAGNETISMO

No século XIX ocorreu a primeira grande unificação das leis da Natureza quando James Clerk Maxwell (1831-1879) percebeu que ao aplicar o princípio de conservação da carga era possível colocar sob uma mesma estrutura matemática fenômenos tão diferentes como eletricidade, magnetismo e luz. De acordo com a proposta de Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) esse conjunto de leis pode ser escrito de maneira bastante simétrica com a introdução do monopolo magnético.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = J_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3)$$

$$-\nabla \times \vec{E} = J_m + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

em que ρ_e é a densidade de carga elétrica em Coulomb/m³ e ρ_m é a densidade de carga magnética em Weber/m³.

A Equação 3 é a equação de Ampère como modificada por James Clerk Maxwell. Note-se que se for aplicado o divergente na equação de Ampère na Equação 3 obtem-se a grande sacada de James Clerk Maxwell para unificar as leis. Ele percebe que a equação de conservação da carga elétrica indica que tem um termo faltando. Esse termo tem unidade de corrente elétrica e recebeu o nome de corrente de deslocamento.

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} = 0 = \nabla \cdot J_e + \nabla \cdot \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \nabla \cdot J_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} \quad (5)$$

Se for calculado o rotacional da mesma equação em um meio livre de cargas obtem-se a equação da onda.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \nabla \times \vec{D}}{\partial t} = -\epsilon_o \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Usa-se que $\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}$. De maneira equivalente para o campo elétrico. Usa-se o fato que μ_o e ϵ_o são constantes.

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad \boxed{\nabla^2 \vec{D} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}} \quad (7)$$

A velocidade da onda é a velocidade da luz,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (8)$$

em que $\epsilon_o = 8,85418 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ é a permissividade do vácuo e $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ é a permeabilidade do vácuo.

Por um breve período a interpretação da luz como onda ganhou força. No entanto, surge o problema do meio de propagação da onda. Foi então comprovado experimentalmente por Albert Abraham Michelson (1852-1931) e Edward Williams Morley (1838-1923) que não existe meio de propagação e a velocidade da luz não depende do sistema de referência. A velocidade da luz é uma constante da Natureza. Essa e diversas outras observações experimentais demonstraram que o conhecimento obtido até então estava incompleto. Assim, no início do século XX foram elaboradas duas teorias que mudaram completamente nossa visão dos fenômenos naturais: **teoria da relatividade** e **teoria quântica**.

A. Radiação de Cherenkov

Note-se que a velocidade da luz em um meio é menor que a velocidade da luz no vácuo.

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu_r(\omega)\mu_o\epsilon_r(\omega)\epsilon_o}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r(\omega)\epsilon_r(\omega)}} = \frac{c}{n(\omega)} \quad (9)$$

Assim, uma partícula ao passar do vácuo para o meio pode estar em velocidade maior que a velocidade da luz para o meio. No caso particular de elétrons ao fazer essa transição emite-se radiação em faixa ampla do espectro eletromagnético, mas apresenta cor azulada na parte visível do espectro emitido. Foi observada experimentalmente por Pavel Alekseyevich Cherenkov (1904-1990) em 1934. Esse efeito também é observado com outras partículas carregadas.

A partícula com velocidade maior que a velocidade da luz no meio polariza o meio ao passar por ele, deixando um rastro em estado excitado. As partículas excitadas do meio emitem radiação ao retornar ao estado de equilíbrio.

B. Métrica e teoria da relatividade

Com a teoria da relatividade unifica-se o espaço e o tempo de maneira que a posição da partícula clássica é escrita com quatro dimensões. Utiliza-se o índice grego para indicar o componente. De maneira que para o componente x_μ tem-se $\mu = 0, 1, 2, 3$. Define-se que a coordenada $\mu = 0$ está relacionada ao tempo. Na notação da teoria da relatividade a posição relativa dos índices tem significado como é apresentado mais adiante.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (10)$$

Para medir distâncias no espaço-tempo é necessário definir a métrica. Para o espaço-tempo plano essa métrica é conhecida como métrica de Hermann Minkowski (1864-1909) em que há duas escolhas de sinais:

- (+ - - -),

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad x_\mu = (ct, -x, -y, -z) \quad (11)$$

- (- + + +),

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad x_\mu = (-ct, x, y, z) \quad (12)$$

As duas escolhas são equivalentes. A primeira escolha é comum em física de partículas e a segunda escolha é comum em teoria da relatividade. A distribuição de sinais positivos e negativos é denominada de assinatura da métrica. Em Matemática a assinatura da métrica é a quantidade de auto-valores positivos, negativos e nulos da matriz associada à métrica. Neste texto utiliza-se a primeira escolha de sinais (+ - - -) para a métrica de Minkowski. Para o espaço-tempo plano com essa escolha de sinais para a métrica de Minkowski, escreve-se a matriz da métrica

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Note-se que $[\eta_{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}]^{-1} = [\eta^{\mu\nu}]$. Independente da escolha de sinais, o determinante da matriz $[\eta_{\mu\nu}]$ é negativo. Para obter valor positivo define-se

$$-g \equiv -\mathbf{det}\{\eta_{\mu\nu}\}. \quad (14)$$

Na aplicação da teoria da relatividade obtém-se equações em que é necessário realizar diversas somas. Para evitar escrever grande quantidade de símbolos de somatório, Σ , Albert Einstein (1879-1955) desenvolveu a convenção em que índice repetido do mesmo lado da equação subentende-se que está sendo somado de maneira que as equações ganham aspecto simplificado. Para ilustrar essa notação considere-se o produto interno. Define-se o produto interno entre dois quadrivetores do espaço plano,

$$X \cdot Y = X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu = X^0 Y^0 - X^1 Y^1 - X^2 Y^2 - X^3 Y^3. \quad (15)$$

Exemplo: o produto interno é utilizado para calcular a relação energia-momento, que é invariante ao mudar o sistema de coordenadas, com o quadrimomento $p = (\mathcal{E}/c, p_x, p_y, p_z)$,

$$p \cdot p = p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = (\mathcal{E}/c, p_x, p_y, p_z) \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p}. \quad (16)$$

em que $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

No referencial preso à partícula de massa m_0 tem-se $\vec{p} = (0, 0, 0)$ e $\mathcal{E} = m_0 c^2$.

$$p \cdot p = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{m_0^2 c^4}{c^2} - 0 \implies \boxed{\mathcal{E}^2 = m_0^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \quad (17)$$

1. Métrica

Pode-se aplicar o produto interno para calcular o diferencial de distância.

$$-ds^2 = -(cdt, dx, dy, dz) \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_{01} & \eta_{02} & \eta_{03} \\ \eta_{10} & \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{20} & \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{30} & \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (18)$$

Diz-se que uma métrica é positiva-definida se $ds^2 \geq 0$. Alguns autores preferem usar $\mu = 4$ para a coordenada do tempo e também representam o tempo como um número complexo, $x^4 = ict$, para que a métrica seja positiva definida. Note-se que a métrica de Minkowski não é positiva-definida como a métrica euclidiana.

- Para $c^2 t^2 > r^2$ diz-se supremacia temporal (*timelike*),
- Para $c^2 t^2 < r^2$ diz-se supremacia espacial (*spacelike*),
- Para $c^2 t^2 = r^2$ diz-se supremacia luminosa (*lightlike*).

Para coordenadas curvilíneas e no espaço-tempo curvo com uma métrica definida. A métrica não é necessariamente constante. Ela pode variar de ponto para ponto do espaço-tempo. A métrica do espaço-tempo em que o sistema de referência não é ortogonal apresenta termos fora diagonal não-nulos. Em coordenadas esféricas,

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (19)$$

Como exemplo de métrica do espaço-tempo curvo tem-se a métrica de Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925) e Georges-Henri Édouard Lemaitre (1894-1966), Howard Percy Robertson (1903-1961), Arthur Geoffrey Walker (1909-2001),

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{a(t)^2}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 a(t)^2 d\theta^2 + r^2 a(t)^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (20)$$

em que $a(t) = R(t)/r$ e $k = +1, 0, -1$ é o índice de curvatura que indica o tipo de curvatura da métrica.

$$k = \begin{cases} +1 \rightarrow \text{Elíptico} \\ 0 \rightarrow \text{Plano} \\ -1 \rightarrow \text{Hiperbólico} \end{cases} \quad (21)$$

Métrica de Karl Schwarzschild (1873-1916) para o **buraco-negro**,

$$-ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_{Newton}M}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2G_{Newton}M}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (22)$$

Para avaliar o impacto da curvatura define-se os coeficientes de conexão ou símbolos de Elwin Bruno Christoffel (1829–1900) da curvatura espacial. Veja Apêndice A.3. Note-se que no espaço plano os símbolos de Christoffel são nulos. A curvatura tem impacto na força o que faz surgir forças fictícias como Coriolis e centrífuga que se manifestam na equação através dos símbolos de Christoffel. Pode-se pensar nos símbolos de Christoffel como fatores de correção mas em teoria geral da relatividade eles representam o campo gravitacional. A curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia é interpretada como força gravitacional. Na presença de curvatura ou apenas da gravidade a evolução da partícula é descrita pela equação da geodésica,

$$\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (23)$$

De maneira que a equação da força ganha um termo extra ou pode-se dizer que a derivada sofre uma correção para o caso de coordenadas curvilíneas ou espaços curvos. Na ausência de qualquer outra força o sistema evolui sobre geodésica do espaço-tempo curvo.

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha p^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (24)$$

C. Mudança de sistema de coordenadas

A teoria da relatividade faz uso do conceito de **tensor** que é um ente matemático ou objeto algébrico que generaliza o conceito de vetor e matriz. O tensor independe do sistema de coordenadas. Se for escolhido um sistema de referência o tensor pode ser representado por um conjunto de componentes. **A representação ou componentes do tensor dependem somente da orientação relativa ou proporção do sistema de coordenadas, i.e., depende apenas da informação local e não absoluta.** Nesse contexto o vetor posição absoluta não é um tensor, pode ser considerado um pseudo-tensor, mas a diferença entre vetores posição, que determina uma distância, é um tensor.

O tensor ou grandeza física pode ainda ser classificado em **covariante** ou **contravariante** a depender de como os componentes mudam com a mudança do sistema de referência como ocorre se o observador for trocado. **O tensor não muda mas os componentes mudam**, i.e., quando o observador ou sistema de referência é modificado, os componentes mudam para que o tensor não mude.

- **Contravariante** - os componentes mudam de maneira oposta ou inversa à mudança do sistema de referência, i.e., os componentes do vetor contra-variam. A matriz de transformação dos componentes é a inversa da matriz de transformação do sistema de coordenadas. Na notação de Einstein o índice é posicionado em cima. Exemplos: vetor posição relativa, vetor tangente, vetor velocidade, vetor aceleração, vetor momento e vetor força.

$$v = v^\mu \hat{e}_\mu = (v'^\nu A_\nu^\mu) \left((A^{-1})_\mu^\lambda \hat{e}'_\lambda \right) = v'^\nu \hat{e}'_\nu = v \quad (25)$$

Considere-se a mudança de sistemas de coordenadas, $x \rightarrow y$, com rotação, dilatação ou deformação, sem translação,

$$y_\mu = \sum_\nu \frac{\partial y_\mu}{\partial x_\nu} x_\nu = \sum_\nu a_\mu^\nu x_\nu \longrightarrow Y = AX. \quad (26)$$

Para um quadrivetor, v , invariante, i.e., que independe do sistema de coordenadas,

$$v = \sum_\mu v'^\mu y_\mu = \sum_\mu v'^\mu \sum_\nu a_\mu^\nu x_\nu = \sum_\nu \left(\sum_\mu v'^\mu a_\mu^\nu \right) x_\nu = \sum_\nu v^\nu x_\nu = v \quad (27)$$

Note-se que os componentes do quadrivetor, v , mudam de maneira inversa à mudança do sistema de coordenadas.

$$v^\nu = \sum_\mu v'^\mu a_\mu^\nu \longrightarrow v = v' A \implies v' = v A^{-1} \quad (28)$$

Se v é a distância e a escala é dividida por 100, de metro para centímetro, então o valor do componente é multiplicado por 100 para que continue a indicar a mesma distância. Nesse caso, diz-se que o vetor invariante é **contravariante** em relação à mudança de sistemas de coordenadas,

$$v' \hat{r}' = (v A^{-1})(A \hat{r}) = v \hat{r}. \quad (29)$$

- **Covariante** - os componentes mudam de maneira igual à mudança do sistema de referência. Utiliza-se a mesma matriz de transformação para os componentes e para o sistema de coordenadas. Na notação de Einstein o índice é posicionado embaixo. Esse tipo de transformação aplica-se ao funcional linear,

$${}^y f = f(y_\mu) = f \left(\sum_\nu a_\mu^\nu x_\nu \right) = \sum_\nu a_\mu^\nu f(x_\nu) = A {}^x f. \quad (30)$$

Como exemplo considere-se o gradiente.

$$\sum_{\mu} \frac{\partial f}{\partial y^{\mu}} \hat{y}^{\mu} = \sum_{\mu} \frac{\partial f}{\partial y^{\mu}} \sum_{\nu} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \hat{x}^{\nu} = \sum_{\nu} \sum_{\mu} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \hat{x}^{\nu} = \sum_{\nu} \frac{\partial f}{\partial x^{\nu}} \hat{x}^{\nu} \quad (31)$$

Também se aplica a vetores da base dual ou base recíproca, a exemplo do vetor de onda. O produto interno entre o quadrivetor posição e o quadrivetor propagação de onda é um invariante pela mudança do sistema de coordenadas,

$$\hat{k} \cdot \hat{r} = (A^{-1} \hat{k}) \cdot (A \hat{r}) = \hat{k}' \cdot \hat{r}'. \quad (32)$$

Note-se que os componentes de k variam da mesma maneira que o sistema de coordenadas.

$$k = \sum_{\mu} k'_{\mu} \hat{k}'^{\mu} = \sum_{\mu} k'_{\mu} \sum_{\nu} (a^{-1})^{\mu}_{\nu} \hat{k}^{\nu} = \sum_{\nu} \left(\sum_{\mu} k'_{\mu} (a^{-1})^{\mu}_{\nu} \right) \hat{k}^{\nu} = \sum_{\nu} k_{\nu} \hat{k}^{\nu} = k \quad (33)$$

$$k_{\nu} = \sum_{\mu} k'_{\mu} (a^{-1})^{\mu}_{\nu} \longrightarrow k = k' A^{-1} \implies k' = k A \quad (34)$$

Diz-se que o quadrivetor k é **covariante** em relação à mudança de sistemas de coordenadas. Tem-se que \vec{r} com unidade de comprimento é o vetor contravariante e \vec{k} com unidade de inverso do comprimento é o vetor covariante ou covetor, i.e., é o vetor do espaço dual representado com a base recíproca.

Os componentes do tensor nos vetores da base são denominados de componentes contravariantes e os componentes do tensor nos vetores da base recíproca são denominados de componentes covariantes. No espaço euclidiano os componentes contravariantes e covariantes são idênticos. No espaço de Minkowski pode-se passar de componente contravariante para covariante e vice-versa ao multiplicar pelo tensor métrico. A posição dos índices não é importante no espaço-tempo plano, mas faz diferença no espaço-tempo curvo.

Esse conceito não deve ser confundido com leis covariantes, para esse caso é mais apropriado dizer leis invariantes.

D. Transformação de Lorentz

Considere-se o caso de mudança de sistema de referência. Por exemplo, dois observadores que estão em velocidade relativa constante entre eles. Esse tipo de transformação é classificada como transformação de Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928).

Para que todos os sistemas de referência sejam equivalentes exige-se que essa transformação seja linear para que a inversa também seja linear. Pelo menos para a separação típica entre observadores dentro do Universo. De maneira que a transformação pode ser representada por uma matriz,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \lambda_3^0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \lambda_3^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_0^3 & \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{pmatrix} \quad (35)$$

em que $\lambda_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$.

Para ilustrar considere-se o caso em que o movimento ocorre na direção x , que os dois sistemas de referência coincidem em $t = t' = 0$ e que o sistema x' se desloca com velocidade U em relação ao sistema x . Deseja-se passar do sistema x para o sistema x' .

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$cdt' = \lambda_0^0 cdt + \lambda_1^0 dx \quad (37)$$

$$dx' = \lambda_0^1 cdt + \lambda_1^1 dx \quad (38)$$

Outra restrição é que a luz propaga com a mesma velocidade c em todos os sistemas de referência.

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (39)$$

Como os eixos y' e y , z' e z são idênticos.

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 \quad (40)$$

Substitui-se as expressões na Equação 37 e na Equação 38 nessa equação para obter,

$$\lambda_0^0 \lambda_1^0 - \lambda_0^1 \lambda_1^1 = 0 \quad (41)$$

$$(\lambda_0^0)^2 - (\lambda_0^1)^2 = 1 \quad (42)$$

$$(\lambda_1^1)^2 - (\lambda_1^0)^2 = 1 \quad (43)$$

Define-se

$$-\beta \equiv \frac{\lambda_0^1}{\lambda_0^0} = \frac{\lambda_1^0}{\lambda_1^1} \quad (44)$$

$$\gamma^2 \equiv \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (45)$$

Reescreve-se

$$(\lambda_0^0)^2 - \beta^2 (\lambda_0^0)^2 = 1 \implies (\lambda_0^0)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \quad (46)$$

$$(\lambda_1^1)^2 - \beta^2 (\lambda_1^1)^2 = 1 \implies (\lambda_1^1)^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \quad (47)$$

Exige-se que o determinante da transformação deve ser unitário.

$$\lambda_0^0 \lambda_1^1 - \lambda_0^1 \lambda_1^0 = 1 \implies \lambda_0^0 \lambda_1^1 = \frac{1}{1 - \beta^2} = \gamma^2 \implies \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (48)$$

Assume-se que os sistemas de coordenadas têm mesma orientação, i.e., não mudam de sinal, assim escolhe-se a raiz positiva, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

$$\Lambda = (\lambda_{\alpha}^{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Para o sistema x' que se desloca com velocidade U no sentido positivo do sistema x obtem-se $\beta = U/c$. Para o sistema de coordenadas x' em que a partícula está em repouso, o tempo é denominado de **tempo próprio**, τ . Note-se que o tempo evolui mais rapidamente em um referencial diferente daquele em que a partícula está em repouso.

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau \quad (50)$$

Para obter a velocidade da partícula no sistema de coordenadas x , calcula-se a transformada inversa.

$$\begin{pmatrix} \gamma_U & \beta_U \gamma_U & 0 & 0 \\ \beta_U \gamma_U & \gamma_U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_U \begin{pmatrix} c \\ U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

Em um terceiro sistema de referência que se move com velocidade V em relação ao sistema de referência x , tem-se que a velocidade do sistema de referência x' nesse terceiro sistema de referência,

$$\begin{pmatrix} \gamma_V & -\beta_V \gamma_V & 0 & 0 \\ -\beta_V \gamma_V & \gamma_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_U & \beta_U \gamma_U & 0 & 0 \\ \beta_U \gamma_U & \gamma_U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_V \gamma_U \left(1 - \frac{UV}{c^2}\right) \begin{pmatrix} \frac{c}{\left(1 - \frac{UV}{c^2}\right)} \\ \frac{U-V}{c^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Note-se que,

$$\gamma_V \gamma_U \left(1 - \frac{UV}{c^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(U-V)^2}{c^2(1-UV/c^2)^2}}}. \quad (53)$$

Outro caso de interesse é o cálculo do produto interno quando se muda de sistema de coordenadas,

$$x' \cdot y' = x'^{\mu} \eta_{\mu\nu} y'^{\nu} = x^{\sigma} \lambda_{\sigma}^{\mu} \eta_{\mu\nu} \lambda_{\xi}^{\nu} y^{\xi} = x^{\sigma} \eta_{\sigma\xi} y^{\xi} = x \cdot y. \quad (54)$$

A equação de Schrödinger não é invariante pela transformação de Lorentz. A equação de Dirac e a equação de Klein-Gordon são invariantes pela transformação de Lorentz. Outra classe de transformação de interesse é a transformação de Jules Henri Poincaré (1854-1912) que envolve rotação e translação.

E. Velocidade e aceleração

As grandezas físicas devem ser invariantes pela transformação de Lorentz. Assim pode-se definir a velocidade e a aceleração no referencial que viaja com a partícula em que o tempo é o tempo próprio τ .

$$U^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial \tau} = (c, U_x, U_y, U_z) = (c, 0, 0, 0) \quad (55)$$

$$a^\mu = \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial \tau^2} = (0, a_x, a_y, a_z) \quad (56)$$

Para ir do referencial em que a partícula está em repouso para o referencial em que ela se move utiliza-se a transformada inversa na Equação 49. Assim, no referencial em que a partícula viaja com velocidade constante, \vec{v} ,

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = (\lambda^{-1})^\mu_\nu U^\nu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \quad (57)$$

$$U^\mu U_\mu = U^\mu \eta_{\mu\nu} U^\nu = c^2 \quad (58)$$

$$V^\mu V_\mu = V^\mu \eta_{\mu\nu} V^\nu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 \gamma^2(1 - \beta^2) = c^2 \quad (59)$$

em que $\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$, $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$ e $\gamma = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Como $dt = \gamma d\tau$, obtém-se que

$$p = m_o \frac{dx}{d\tau} = \gamma m_o \frac{dx}{dt} = \gamma m_o v \quad (60)$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2} = m_o c^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}} = \gamma m_o c^2 \quad (61)$$

Para uma partícula em $x^\mu = (ct, x, 0, 0)$ submetida a aceleração constante, $\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2}$,

$$a^\mu a_\mu = -a^2 = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \tau^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \right)^2. \quad (62)$$

Pode-se reescrever

$$1 = -\frac{c^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} \right)^2. \quad (63)$$

Utiliza-se a identidade trigonométrica adequada para obter a solução,

$$t = \frac{a}{\omega^2 c} \sinh(\omega \tau) \quad (64)$$

$$x = \frac{a}{\omega^2} \cosh(\omega \tau). \quad (65)$$

Usa-se que $x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - x^2 = -a^2/\omega^4$. Então $x = \frac{a}{\omega^2} \sqrt{1 + \omega^4 c^2 t^2/a^2}$. Pode-se escrever $\omega = a/c$. No limite em que $t \rightarrow \infty$, a velocidade,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega^2 c^2 t/a}{\sqrt{1 + \omega^4 c^2 t^2/a^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2/c^2}} = c \quad (66)$$

1. Contração do comprimento

Considere-se dois sistemas de referência que se movem com velocidade v um em relação ao outro na direção x . Para um comprimento D_o em repouso em um dos dois sistemas de referência com uma extremidade em x_1 e outra extremidade em x_2 .

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \quad (67)$$

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{\beta}{c}x_1\right) \quad (68)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \quad (69)$$

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{\beta}{c}x_2\right) \quad (70)$$

Assume-se que a posição das duas extremidades são medidas de maneira simultânea.

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0 \implies D_o = x_2 - x_1 = \frac{c}{\beta} \Delta t \quad (71)$$

Então ocorre contração do comprimento.

$$D = x'_2 - x'_1 = \gamma(D_o - v\Delta t) = \gamma\left(D_o - v\frac{\beta}{c}D_o\right) = \frac{D_o}{\gamma} = D_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (72)$$

Não ocorre contração nas direções transversais. Assim, para um corpo que gira submetido à força centrípeta, $F_c = pc/r$, o momento de inércia angular, I e o momento angular, J .

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \gamma dm_o = \int r^2 \gamma \rho_o dV_o \quad (73)$$

$$J = I\omega = \int \omega r^2 \gamma \rho_o dV_o \quad (74)$$

F. Equações de Maxwell na teoria da relatividade

Como o campo elétrico e o campo magnético são faces de um mesmo objeto, é mais conveniente escrever as equações de Maxwell em termos do campo eletromagnético que combina os dois no tensor eletromagnético ou tensor de Faraday, $F^{\mu\nu}$. As equações ficam ainda mais compactas na notação da teoria da relatividade,

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \longrightarrow \boxed{\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j_e^{\nu}} \quad (75)$$

$$\sum_{\nu} \partial_{\mu} G^{\mu\nu} \longrightarrow \boxed{\partial_{\mu} G^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_m^{\nu}} \quad (76)$$

$$\sum_{\nu} \partial_{\mu} \tilde{G}^{\mu\nu} \longrightarrow \boxed{\partial_{\mu} \tilde{G}^{\mu\nu} = \epsilon_0 j_m^{\nu}} \quad (77)$$

em que $j_e^{\mu} = (c\rho_e, J_{e,x}, J_{e,y}, J_{e,z})$, $j_m^{\mu} = (c\rho_m, J_{m,x}, J_{m,y}, J_{m,z})$, $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu} = (\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t, \partial_1 = \partial_x, \partial_2 = \partial_y, \partial_3 = \partial_z)$ e $\partial^{\mu} = \partial/\partial x_{\mu} = (\partial^0 = \frac{1}{c}\partial_t, \partial^1 = -\partial_x, \partial^2 = -\partial_y, \partial^3 = -\partial_z)$.

Os vários tensores eletromagnéticos são definidos a seguir. Note-se que para baixar os índices utiliza-se a identidade,

$$F_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} \eta_{\beta\nu} \quad F^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} \eta^{\beta\nu}. \quad (78)$$

Na escolha (+ ---) para a métrica adotada nesse texto tem-se as seguintes definições para o tensor eletromagnético,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Outra possibilidade,

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x/c & -H_y/c & -H_z/c \\ H_x/c & 0 & D_z & -D_y \\ H_y/c & -D_z & 0 & D_x \\ H_z/c & D_y & -D_x & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x/c & H_y/c & H_z/c \\ -H_x/c & 0 & D_z & -D_y \\ -H_y/c & -D_z & 0 & D_x \\ -H_z/c & D_y & -D_x & 0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

Na ausência de corrente, ao fazer a transformação $\vec{E} \rightarrow c\vec{B}$ passa-se das equações do campo elétrico para as equações do campo magnético, $F^{\mu\nu} \rightarrow G^{\mu\nu}$. Essa é a transformação da dualidade ou transformação-D. Ela pode ser generalizada para um ângulo arbitrário ξ ,

$$\begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\text{sen} \xi \\ \text{sen} \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} \quad (82)$$

A escolha do ângulo ξ rotaciona elétrico em magnético e vice-versa. A noção de dualidade aparece em **teoria da corda**, a candidata à teoria de tudo.

Se for utilizado $\tilde{G}^{\mu\nu}$ a transformação passa a ser

$$\begin{pmatrix} \vec{H} \\ \vec{D} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Invariantes de Lorentz:

$$\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \left(|\vec{B}|^2 - \frac{1}{c^2}|\vec{E}|^2 \right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{4\mu_o}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} - \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}} \quad (84)$$

$$\frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = \left(-|\vec{B}|^2 + \frac{1}{c^2}|\vec{E}|^2 \right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{4\mu_o}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} + \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}} \quad (85)$$

$$\frac{1}{2}\tilde{G}_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} = \left(-\frac{1}{c^2}|\vec{H}|^2 + |\vec{D}|^2 \right) \rightarrow \boxed{\frac{1}{4\epsilon_o}\tilde{G}_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H} + \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}} \quad (86)$$

Pode-se ainda escrever $F^{\mu\nu}$ e $G^{\mu\nu}$ em termos do potencial quadri-dimensional,

$$A_e^\mu = (\phi_e/c, A_{e,x}, A_{e,y}, A_{e,z}) \quad (87)$$

$$A_m^\mu = (\phi_m/c, A_{m,x}, A_{m,y}, A_{m,z}) \quad (88)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A_e^\nu - \partial^\nu A_e^\mu \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{e,\nu} - \partial_\nu A_{e,\mu} \quad (89)$$

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu A_m^\nu - \partial^\nu A_m^\mu \quad G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_{m,\nu} - \partial_\nu A_{m,\mu} \quad (90)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_e^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A_e^\mu = \mu_o j_e^\nu \quad (91)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A_m^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A_m^\mu = \frac{1}{c} j_m^\nu \quad (92)$$

Como exemplo da transformação do quadri vetor potencial devido a mudança de sistema de referência, considere-se $A^\mu = (-\frac{E}{c}y, -\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0)$. Após a transformação de Lorentz para o sistema x' que se move com velocidade $c\beta$ em relação ao sistema x , obtem-se

$$A'^\mu = \lambda_\nu^\mu A^\nu = \gamma \left((-E/c + \beta B/2)y', (\beta E/c - B/2)y', \frac{B}{2}(c\beta t' + x'), 0 \right) \quad (93)$$

em que $(ct, x, y, z) = (\gamma ct' + \gamma\beta x', \gamma\beta ct' + \gamma x', y', z')$.

Agora pode-se calcular o campo elétrico e a densidade de fluxo magnético.

$$\vec{E}' = -\nabla'\phi' - \frac{\partial}{\partial t'}\vec{A}' = \gamma(0, E - c\beta B, 0) \quad (94)$$

$$\vec{B}' = \nabla' \times \vec{A}' = \gamma(0, 0, B - \beta E/c) \quad (95)$$

Note-se que para $B = 0$ o observador no sistema de referência em movimento mede $B' \neq 0$. Para $B \neq 0$ e velocidade do novo sistema de referência $c\beta = E/B$ o campo elétrico é nulo.

G. Equação da força de Lorentz

1. Espaço-tempo plano

Para a partícula com carga que propaga no espaço-tempo plano submetida ao campo eletromagnético tem-se a força eletromagnética,

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qU_\nu F^{\mu\nu}. \quad (96)$$

em que $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ é o quadri-momento linear.

Essa equação para a força é conhecida como equação da força de Lorentz. Ela pode ser obtida a partir da minimização da ação ou princípio de Hamilton como apresentado na Seção IIII.

2. Espaço-tempo curvo

Na presença do campo eletromagnético, generaliza-se a Equação 78 para definir o tensor eletromagnético no espaço-curvo,

$$F^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} g^{\beta\nu} \quad F_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} g_{\beta\nu}. \quad (97)$$

Assim no espaço-tempo curvo a equação de Lorentz é modificada para incluir o efeito da curvatura representado pelos símbolos de Christoffel.

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha p^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} + qF^{\alpha\beta} \frac{dx_\beta}{d\tau} \quad (98)$$

Considere-se o quadri-vetor densidade de corrente elétrica, $j_e = (c\rho_e, J_{e,x}, J_{e,y}, J_{e,z})$,

$$j_e^\mu = \rho_e \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \rho_e U^\mu = \rho_{e,U} U^\mu, \quad (99)$$

em que ρ_e é a densidade de carga elétrica no referencial que se move na mesma velocidade da carga, $\rho_{e,U}$ é a densidade de carga elétrica medida por um observador que observa a carga se mover com velocidade U e $dt/d\tau = \gamma$.

Pode ser escrito em termos da corrente, então tem-se a densidade de força de Lorentz,

$$f_\mu = j^\nu F_{\mu\nu} \quad (100)$$

submetida ao eletromagnetismo e gravidade,

H. Corrente elétrica e relatividade

Na eletrônica busca-se modelar o transporte de carga entre dois terminais. A maneira como a carga é transportada em termos do campo eletromagnético externo aplicado determina a função do dispositivo e possibilita realizar as diversas aplicações tecnológicas.

Por exemplo, considere-se cargas, q_- , em movimento com velocidade \vec{U} em um fio de material condutor que está em repouso para o observador. Antes das cargas entrarem em movimento o condutor é neutro. Assume-se que todas as cargas apresentam mesma velocidade.

Considere-se uma carga de teste que se move com velocidade \vec{V} ao lado do fio, como mostrado na Figura 1, e calcule-se a força sobre ela. Aplica-se a lei de Gauss em uma casca cilíndrica que envolve o fio de maneira que o eixo de simetria coincide com o fio.

$$\int \vec{D} \cdot dA = Q \implies \epsilon_0 E(r) 2\pi r l = \rho_{liq} A l \implies \vec{E}(r) = \frac{\rho_{liq} A}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{r} \quad (101)$$

em que A é a área da secção transversal do fio e l é um comprimento arbitrário do fio.

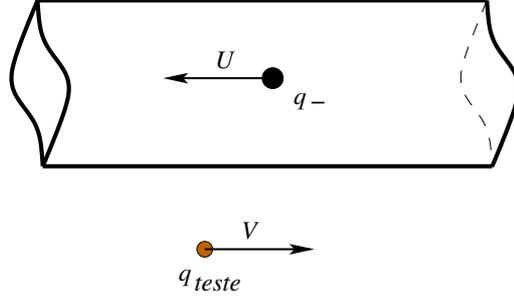


FIG. 1. Carga de teste move-se ao lado do fio.

No referencial do laboratório o campo elétrico é nulo porque o fio é neutro, $\rho_{liq} = 0$. De maneira que a força elétrica sobre a carga de teste deveria ser nula. No entanto, é necessário examinar com mais cuidado. Considere-se a corrente de deriva,

$$I = q_- n_- v_- A \quad (102)$$

No referencial do laboratório,

$$v_- = -\gamma_U U \quad (103)$$

No referencial da carga de teste, as cargas no fio se movem com velocidade,

$$v_+ = -\gamma_U \gamma_V (1 + UV/c^2) \frac{(V + U)}{1 + UV/c^2}. \quad (104)$$

Por outro lado nesse referencial o fio se move. De maneira que os íons fixos do fio tem velocidade,

$$v_+ = -\gamma_V V. \quad (105)$$

A dilatação do tempo e contração do comprimento altera a densidade de carga. A densidade de carga é parte do quadrivetor da densidade de corrente elétrica, $j_e^\mu = (c\rho_e, J_{e,x}, J_{e,y}, J_{e,z})$, e ao mudar de sistema de referência é necessário aplicar a transformação de Lorentz nesse quadrivetor para obter a expressão da densidade de carga no referencial da carga de teste,

$$\rho_{liq} = q(n_+ - n_-) = qn_0(\gamma_+ - \gamma_-) = qn_0\gamma_V(1 - \gamma_U(1 + UV/c^2)) \approx -qn_0\gamma_U\gamma_V \frac{UV}{c^2} \quad (106)$$

Note-se que para $V \neq 0$, tem-se $\rho_{liq} \neq 0$. Pode-se estimar a força percebida pela carga de teste como observada no referencial do laboratório.

$$E = -qn_o\gamma_U\gamma_V\frac{UV}{c^2}\frac{A}{2\pi\epsilon_0r} = \gamma_V V\frac{\mu_o I}{2\pi r} = \gamma_V VB \implies F = qE = qVB \quad (107)$$

em que $I = -qn_o\gamma_U UA$, $\gamma_V \approx 1$ e $1/c^2 = \mu_o\epsilon_o$.

Essa visualização simplificada é apenas para ilustrar a relação íntima entre eletricidade e magnetismo. Essa não é a fonte exclusiva de magnetismo. Apenas ilustra a transformação do campo elétrico em magnético, como também se pode ter a transformação inversa.

Agora, considere-se dois observadores que se deslocam um em relação ao outro. Ao buscar conciliar os resultados observados por cada um deles, i.e., mudar o sistema de coordenadas, é necessário aplicar a transformação de Lorentz. Para o quadri-vetor densidade de corrente elétrica,

$$j_e^{\prime\nu} = \lambda_\mu^\nu j_e^\mu \quad (108)$$

De acordo com a teoria da relatividade ocorre contração do comprimento ou dilatação do tempo, o que afeta a densidade de carga e a densidade de corrente. Para o sistema que se move na direção x com velocidade U ,

$$c\rho_e' = \gamma c\rho_e - \beta\gamma J_{e,x} = \gamma\left(c\rho_e - \frac{U}{c}J_{e,x}\right) \quad (109)$$

$$J_{e,x}' = -\gamma\beta c\rho_e + \gamma J_{e,x} = \gamma(J_{e,x} - \rho_e U). \quad (110)$$

No entanto, a conservação da carga é invariante, i.e., é um invariante de Lorentz,

$$\partial'_\mu j^{\prime\mu} = \partial_\alpha(\lambda^{-1})^\alpha_\mu \lambda^\mu_\beta j^\beta = \partial_\alpha \delta^\alpha_\beta j^\beta = \partial_\alpha j^\alpha = 0. \quad (111)$$

A mudança também afeta o quadri-potencial, $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$.

$$\frac{\phi'}{c} = \gamma\frac{\phi}{c} - \beta\gamma A_x = \frac{\gamma}{c}(\phi - UA_x) \quad (112)$$

$$A_x' = -\beta\gamma\phi/c + \gamma A_x = \gamma\left(A_x - \frac{U}{c^2}\phi\right) \quad (113)$$

É necessário resolver a equação da continuidade na Equação 111 na presença do campo eletromagnético,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j_e^\nu. \quad (114)$$

Combine-se a isso a força eletromagnética que atua sobre a carga.

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu \quad (115)$$

Como exemplo, considere-se uma carga elétrica submetida ao campo elétrico constante $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$. Como mostrado na Secção III E, a velocidade da carga, $\vec{u} = (u_x, 0, 0) = (U, 0, 0)$,

$$u_x = U = \frac{qE_x t/m}{\sqrt{1 + \frac{q^2 E_x^2}{m^2 c^2} t^2}}. \quad (116)$$

Note-se que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_x = c. \quad (117)$$

Se ocorrer colisões/espalhamento a carga é freada e isso se traduz em resistividade que está associada à dissipação da energia cinética do portador de carga. Nessa condição a velocidade do portador de carga não é constante. Ele é acelerado, sofre a colisão e é freado. Em seguida é acelerado novamente. De maneira que se pode falar apenas da velocidade média. No regime de baixas velocidades,

$$J_i = qn\langle v \rangle = qn\mu_{ij}E_j = \sigma_{ij}E_j. \quad (118)$$

em que μ_{β}^{α} é a matriz da mobilidade.

Sem considerar a corrente de difusão, a densidade de corrente de deriva pode ser escrita em termos do quadrivetor velocidade de cada portador de carga.

$$\vec{J} = \sum_j q_j \int \vec{U}_j \delta(x - x_j(\tau_j)) d\tau_j \quad (119)$$

em que q_j é a carga, \vec{U}_j é o vetor velocidade, τ_j é o tempo próprio da j -ésima partícula e $\delta(\cdot)$ é a função delta de Dirac ou função impulso no espaço tridimensional.

Acompanhar cada um dos portadores de carga não é computacionalmente eficiente. A alternativa é examinar o comportamento médio. Para isso é necessário obter a distribuição de probabilidade, f , que deve ser uma função da posição e momento de cada portador. Essa é conhecida como distribuição de Boltzmann no espaço tridimensional e distribuição de Ferencz Jüttner no espaço quadridimensional. A evolução dessa distribuição de probabilidade contém a cinética dos portadores de carga. Em teoria de relatividade pode-se escrever em termos do tempo próprio.

$$\frac{\partial f(x^\mu, p^\mu)}{\partial x^\mu} p^\mu + \frac{\partial f(x^\mu, p^\mu)}{\partial p^\mu} \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{df(x^\mu, p^\mu)}{d\tau} \quad (120)$$

De posse da distribuição de probabilidade calcula-se a média sobre todos os portadores.

$$\langle j^\alpha \rangle = \int j^\alpha f(x^\alpha, p^\alpha) dp^\alpha \quad (121)$$

Subentende-se que as grandezas relevantes a seguir são representadas pela média. Para simplificar a notação escreve-se $\langle j^\alpha \rangle \rightarrow j^\alpha$. Para o modelo mais simples assume-se que todos os portadores de carga se movem à velocidade constante igual à velocidade média e que a aproximação do tempo de relaxação pode ser utilizada para as colisões que mantêm os portadores nessa velocidade. O vetor campo elétrico é substituído pelo tensor eletromagnético médio e postula-se que a relação entre o tensor eletromagnético médio aplicado e a densidade de corrente média é linear, como no caso não-relativístico. Assim busca-se a lei de Georg Simon Ohm (1789-1854) generalizada. É importante chamar a atenção que a resposta da corrente ao campo não é instântanea quando se considera campos que variam no tempo.

$$j^\alpha(x) = \int \rho_o(x - x') U^\alpha(x') dx' = \int c\sigma(x - x') F^{\alpha 0}(x') dx' \quad (122)$$

em que ρ_o é a densidade de cargas livres no referencial que se move com a velocidade média para um observador que está estacionário em relação ao fio condutor.

No caso geral, a condutividade σ não é um número. É mais apropriadamente descrita como um tensor. Assume-se o caso estacionário e define-se o quadrivetor densidade de corrente em termos do tensor eletromagnético completo no referencial do laboratório,

$$j^\alpha \equiv \sigma_{\nu\mu}^\alpha F^{\mu\nu} = \sigma_{\alpha\mu}^\alpha F^{\mu\alpha} + \sigma_{\nu\alpha}^\alpha F^{\alpha\nu} = (\sigma_{\alpha\mu}^\alpha - \sigma_{\mu\alpha}^\alpha) F^{\mu\alpha} = 2\sigma_{\alpha\mu}^\alpha F^{\mu\alpha} = \sigma U_\mu \eta_\alpha^\alpha F^{\mu\alpha} \quad (123)$$

em que $\sigma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\sigma(\eta_\mu^\alpha U_\nu - \eta_\nu^\alpha U_\mu) = -\sigma_{\nu\mu}^\alpha$ é o tensor condutividade.

Como exemplo, considere-se um campo elétrico constante na direção x . O tensor eletromagnético, $F^{\mu\nu}$, apresenta apenas duas componentes não nulas.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (124)$$

No referencial do laboratório, $U^\mu = \gamma(c, v_x, 0, 0)$, e na métrica $(+---)$, os componentes de interesse do tensor condutividade tem os seguintes valores,

$$\sigma_{01}^0 = \frac{1}{2}\sigma(\eta_0^0 U_1 - \eta_1^0 U_0) = \gamma \frac{v_x}{2}\sigma \quad (125)$$

$$\sigma_{01}^1 = \frac{1}{2}\sigma(\eta_0^1 U_1 - \eta_1^1 U_0) = \gamma \frac{c}{2}\sigma \quad (126)$$

$$\sigma_{01}^2 = \frac{1}{2}\sigma(\eta_0^2 U_2 - \eta_1^2 U_0) = 0 \quad (127)$$

$$\sigma_{01}^3 = \frac{1}{2}\sigma(\eta_0^3 U_3 - \eta_1^3 U_0) = 0. \quad (128)$$

Para o quadrivetor densidade de corrente obtém-se,

$$j^0 = \sigma_{01}^0 F^{10} + \sigma_{10}^0 F^{01} = 2\sigma_{01}^0 \frac{E_x}{c} = \gamma \frac{v_x}{c} \sigma E_x \quad (129)$$

$$j^1 = \sigma_{01}^1 F^{10} + \sigma_{10}^1 F^{01} = 2\sigma_{01}^1 \frac{E_x}{c} = \gamma \sigma E_x \quad (130)$$

$$j^2 = \sigma_{01}^2 F^{10} + \sigma_{10}^2 F^{01} = 2\sigma_{01}^2 \frac{E_x}{c} = 0 \quad (131)$$

$$j^3 = \sigma_{01}^3 F^{10} + \sigma_{10}^3 F^{01} = 2\sigma_{01}^3 \frac{E_x}{c} = 0 \quad (132)$$

Surge uma surpreendente densidade de carga proporcional ao campo elétrico, o que sugere que essa definição do tensor condutividade pode ser inadequada! O que requer maior investigação.

Se for utilizado o referencial que se move com a velocidade média da carga, $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$, e na métrica $(+---)$, o tensor condutividade tem apenas os seguintes elementos não-nulos,

$$\sigma'^1_{01} = \frac{1}{2}\sigma(\eta_0^1 U_1 - \eta_1^1 U_0) = \frac{c}{2}\sigma = -\sigma'^1_{10} \quad (133)$$

$$\sigma'^2_{02} = \frac{1}{2}\sigma(\eta_0^2 U_2 - \eta_2^2 U_0) = \frac{c}{2}\sigma = -\sigma'^2_{20} \quad (134)$$

$$\sigma'^3_{03} = \frac{1}{2}\sigma(\eta_0^3 U_3 - \eta_3^3 U_0) = \frac{c}{2}\sigma = -\sigma'^3_{30}. \quad (135)$$

Agora é necessário transformar o tensor eletromagnético para o sistema de referência que viaja com a carga ($F' = \Lambda F \Lambda^T$).

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} F^{\mu\nu} \Lambda_{\nu}^{\beta} \quad (136)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (137)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (138)$$

O campo elétrico na direção do movimento não é modificado. Assim, obtem-se o seguinte quadrivetor densidade de corrente elétrica,

$$j'^0 = 0 \quad (139)$$

$$j'^1 = \sigma'_{10} \left(-\frac{E_x}{c} \right) + \sigma'_{01} \left(\frac{E_x}{c} \right) = \sigma E_x \quad (140)$$

$$j'^2 = 0 \quad (141)$$

$$j'^3 = 0. \quad (142)$$

Obtem-se o mesmo resultado anterior ao passar para o sistema do laboratório em que aplica-se a transformada inversa de Lorentz.

$$j^{\alpha} = (\lambda^{-1})_{\beta}^{\alpha} j'^{\beta} \implies \begin{cases} j^0 = c\rho_e = \gamma \frac{U}{c} \sigma E_x, \\ j^1 = J_x = \gamma \sigma E_x \end{cases} \quad (143)$$

Pode-se pensar que a variação da densidade em função do campo é uma consequência da dilatação do tempo e contração do espaço causada pelo campo ao movimentar a partícula carregada.

- Edward M. Purcell, David J. Morin, *Electricity and magnetism*, 3ª Ed., Cambridge University Press (2013).
- David Tong, *Lectures notes on electromagnetism*, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge.
- Charles B. Thorn, *Lectures notes on electromagnetic theory I and II*, Department of Physics, University of Florida.
- B. J. Ahmedov, M. J. Ermamatov, *Electrical conductivity in general relativity*, arXiv:gr-qc/0608060 (2006), Phys.Lett. **15**, 137-151 (2002).
- Carlo Cercignani, Gilberto Medeiros Kremer, *Relativistic Boltzmann equation*, em *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Progress in Mathematical Physics, vol 22. Birkhäuser, Basel (2002).

I. Unificação do eletromagnetismo e gravitação

A primeira proposta de unificação da gravitação com eletromagnetismo é a teoria clássica de Theodor Franz Eduard Kaluza (1885-1954) que em 1921 surpreendentemente introduz

a quinta dimensão para incorporar a gravitação. Para indicar a posição da partícula no espaço de 5 dimensões no instante τ são necessárias cinco componentes,

$$x(\tau) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau), x^4(\tau), x^5(\tau)). \quad (144)$$

As primeiras quatro dimensões do espaço-tempo é a gravitação tradicional e a “gravitação” na quinta dimensão é detectada como eletromagnetismo. Note-se que essa proposta não envolve a teoria quântica. Como visto na secção anterior o campo elétrico e o campo magnético podem ser escritos como componentes do tensor $F^{\mu\nu}$. Theodor Kaluza utiliza essa ideia para escrever o campo gravitacional, $g_{\mu\nu}$, e o vetor potencial, A_μ , como componentes de um mesmo tensor,

$$\tilde{g}_{ab} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \kappa^2 e^{2\sigma} A_\mu A_\nu & \kappa e^{2\sigma} A_\mu \\ \kappa e^{2\sigma} A_\mu & e^{2\sigma} \end{pmatrix} \quad (145)$$

em que $e^\sigma = \phi$ é um campo escalar e κ é o fator de escala.

Essa é uma matriz 5×5 simétrica com 15 componentes independentes: dez componentes independentes estão relacionados com a métrica gravitacional, quatro componentes independentes estão relacionados com o potencial vetor e um componente independente está relacionado com o campo escalar. A métrica do espaço pentadimensional,

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2\tilde{g}_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + \tilde{g}_{55} (dx^5)^2 \quad (146)$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \phi^2 (\kappa A_\nu dx^\nu + dx^5)^2. \quad (147)$$

A partir da definição da métrica calcula-se as conexões de Christoffel e o tensor de Ricci que resulta nas equações de campo. Veja Apêndice A 3. Para o tensor pentadimensional de Ricci assume-se $R_{ab} = 0$. São 10 equações de Einstein modificadas, 4 equações de Maxwell modificadas e 1 equação para o campo escalar. Da identificação com as equações no espaço quadridimensional obtém-se a expressão do fator de escala,

$$\kappa = \sqrt{\frac{16\pi\epsilon_0 G_{Newton}}{c^2}}. \quad (148)$$

Para que o efeito da quinta dimensão não seja perceptível assume-se a condição cilíndrica, i.e., a métrica não depende da quinta coordenada ou é uma função periódica nessa coordenada,

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ab}}{\partial x^5} = 0 \quad (149)$$

para obter as equações dinâmicas.

Em seguida Oskar Benjamin Klein (1894-1977) considerou aspectos quânticos e o momento na quinta dimensão é identificado com a relação de Luis Victor Pierre Ramon de Broglie (1892-1987).

$$mU_5 = \frac{h}{\lambda_5} \quad (150)$$

Utiliza-se a expressão da equação generalizada da força de Lorentz.

$$m \frac{\partial U_5}{\partial \tau} = q U_a F^{a5} \quad (151)$$

Assume-se que a quinta dimensão é compacta e por isso não é observada. O campo escalar descreve como o tamanho/raio da quinta dimensão varia no espaço. Mostra-se que o raio do círculo da quinta dimensão é muito pequeno,

$$\lambda_5 \sim \frac{h\sqrt{G_{Newton}}}{ce} = \frac{6,62607015 \times 10^{-34} \sqrt{6,6743 \times 10^{-11}}}{299792458 \times 1,602 \times 10^{-19}} = 1,125 \times 10^{-28} m. \quad (152)$$

Aspectos que causam dificuldades:

- O que profbe a quinta dimensão de crescer?
- Qual o tamanho da quinta dimensão que a torna estável?
- O que estabiliza a quinta dimensão?

A partícula de teste deve evoluir na geodésica do espaço tempo de cinco dimensões. Em termos matemáticos o universo é homeomórfico ao produto de um círculo com o espaço quadri-dimensional. Essa proposta não foi levada a sério na época nem pelo próprio criador da teoria da relatividade, Albert Einstein. No entanto, a ideia é a base das teorias modernas de unificação inclusive a teoria das cordas que utiliza 10 dimensões para obter a gravitação quântica.

- Theodor Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., p. 966 (1921).
- Oskar Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys., **37**, 895 (1926).
- R. Coquereaux, G. Esposito-Farese, *The theory of Kaluza-Klein-Jordan-Thiry revisited*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **52** (2), 113-150 (1990).
- L. L. Williams, *Field equations and Lagrangian for the Kaluza metric evaluated with tensor algebra software*, Journal of Gravity, 901870 (2015).

III. AÇÃO E CORDA

A. Lagrangiano e Ação

Para o corpo ou sistema com energia cinética, \mathcal{E}_c , e energia potencial, \mathcal{E}_p . A evolução no espaço pode ser descrita através do lagrangiano, que é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial,

$$L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p. \quad (153)$$

Define-se a ação como a integral do lagrangiano,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (154)$$

Assume-se que o estado inicial e final são conhecidos e fixos. Para todas as possíveis trajetórias para ir da posição inicial à posição final, calcula-se o número adimensional S e o sistema evolui na trajetória que oferece o valor extremo para S , i.e., qualquer pequena variação na trajetória em torno dessa trajetória o valor da ação S não muda substancialmente, $\delta S = 0$. Esse é o princípio de William Rowan Hamilton (1805-1865).

$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial t} \delta t \right] dt \quad (155)$$

Usa-se a técnica da integração por partes.

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt = \left[\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta x \right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \delta x \right] dt \quad (156)$$

Ao calcular o valor extremo para a ação para uma variação arbitrária da trajetória obtém-se a equação que descreve a dinâmica do sistema. Conhecida como equação de Leonhard Euler (1707-1783) - Giuseppe Luigi Lagrange (1736 - 1813).

$$\frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (157)$$

A seguir são apresentados alguns exemplos de aplicação.

B. Partícula clássica

Partícula clássica presa a uma mola.

$$\mathcal{E}_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad (158)$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{kx^2}{2} \quad (159)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}} = m\ddot{x} \quad (160)$$

$$\frac{dL}{dx} = kx \quad (161)$$

Obtem-se a lei de Hooke.

$$m\ddot{x} = kx. \quad (162)$$

C. Carga clássica em campo magnético externo

Para examinar o comportamento da carga clássica em campo magnético externo, escreve-se o lagrangiano,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + J \cdot \vec{A}(r) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(r). \quad (163)$$

Para obter a equação do movimento calcula-se

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{\vec{r}}} - \frac{dL}{dr} = \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}) - q\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (164)$$

$$= m \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}} + q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} - q\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (165)$$

Substitui-se a identidade matemática $\nabla(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) = \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \dot{\vec{r}}) + (\dot{\vec{r}} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \dot{\vec{r}}$ e assume-se que $\dot{\vec{r}}$ independe da posição para obter a equação da força de Lorentz.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - q \dot{\vec{r}} \times (\nabla \times \vec{A}) - q \vec{A} \times (\nabla \times \dot{\vec{r}}) - q (\vec{A} \cdot \nabla) \dot{\vec{r}} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} - q \dot{\vec{r}} \times \vec{B} = 0 \quad (166)$$

em que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e para \vec{B} constante $2\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}$.

D. Espaço curvo

Considere-se o lagrangiano em que o tensor métrico é uma função da posição.

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (167)$$

Calcule-se as equações que descrevem a dinâmica.

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^\beta} - \frac{\partial L(x, \dot{x}, \tau)}{\partial x^\beta} = 0. \quad (168)$$

$$g^{\alpha\beta} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L(x, \dot{x}, \tau)}{\partial \dot{x}^\beta} = g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} \frac{d}{d\tau} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{dg_{\beta\nu}}{d\tau} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{dg_{\mu\beta}}{d\tau} \dot{x}^\mu + \quad (169)$$

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\beta} \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\beta} \right]_{\mu, \nu \neq \beta} \quad (170)$$

$$= \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (171)$$

em que $g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} = \delta_\nu^\alpha$.

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial L(x, \dot{x}, \tau)}{\partial x^\beta} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (172)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (173)$$

Obtem-se a equação da geodésica.

$$\boxed{\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0} \quad (174)$$

em que $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$.

- Russell L. Herman, "Derivation of the geodesic equation and defining the Christoffel symbols", Univ. North Carolina at Wilmington, 3 pages (2008).

E. Partícula livre relativística

Na mecânica relativística considere-se a partícula livre no referencial próprio aquele em que ela está estacionária. No referencial preso à partícula tem-se apenas a energia de repouso, o tempo é o tempo próprio τ e a energia de repouso é a energia potencial, $\mathcal{E}_p = mc^2$.

$$L = -mc^2 \implies S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (-mc^2) d\tau \quad (175)$$

A maneira alternativa de examinar esse problema é observar que todos os observadores do tipo Lorentz obtêm a mesma grandeza $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 d\tau^2$. A grandeza ds é um invariante pela transformação de Lorentz, conhecida como escalar de Lorentz. A ação que resulta na geodésica que minimiza o movimento deve ser proporcional a esse escalar,

$$S = \alpha \int ds. \quad (176)$$

Para que o limite não-relativístico seja correto, faz-se $\alpha = -mc$. Escreve-se a ação da partícula relativística livre,

$$\boxed{S = -mc \int ds = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (-mc^2) d\tau} \quad (177)$$

que é o resultado obtido anteriormente.

Para mostrar que esse resultado apresenta o limite correto em baixas energias examina-se a energia da partícula relativística,

$$\mathcal{E} = mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \gamma mc^2 \quad (178)$$

De acordo com a teoria especial ou restrita da relatividade,

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 \implies cd\tau = dt(c^2 - v^2)^{1/2} = \gamma^{-1} c dt \quad (179)$$

em que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Para obter a energia cinética deve-se subtrair a energia de repouso,

$$\mathcal{E}_c = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (180)$$

Note-se que em baixas energias, $v \ll c$,

$$\mathcal{E}_c \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1\right) mc^2 = \frac{1}{2} mv^2 \quad (181)$$

como esperado.

De volta para o lagrangiano e a ação relativístico,

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (-mc^2) \frac{1}{\gamma} dt = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (-mc^2) \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \quad (182)$$

Usa-se que $\frac{dx^\mu}{dt} = (c, \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt})$ e a definição do produto interno em quatro dimensões para generalizar,

$$\boxed{S = \int -mc \sqrt{\frac{dx^\mu}{dt} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dt}} dt.} \quad (183)$$

Esse resultado pode ser generalizado ainda mais para a condição em que o espaço é curvo. Embora o fato de conter a raiz quadrada dificulte o processo de quantização. Por isso na teoria quântica utiliza-se outro modelo de lagrangiano.

F. Partícula relativística no espaço curvo

Na teoria da relatividade todas as coordenadas devem ser tratadas de maneira igual. Na definição clássica da ação, o tempo assume um papel privilegiado o que não é adequado. Para obter essa equivalência, reescreve-se a ação em termos da densidade de lagrangiano, \mathcal{L} , no espaço-tempo.

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} dV = \int \mathcal{L} \mathbf{det}\{J\} d^4x \quad (184)$$

em que J é a matriz jacobiana.

Como foi mencionado a matriz $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo plano. Para indicar a métrica do espaço-tempo curvo utiliza-se o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Assume-se que o tensor métrico é o mesmo em todo o Universo. Pode-se escrever o tensor métrico em termos da matriz jacobiana em quatro dimensões,

$$g_{\mu\nu} = J_{\mu}^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} J_{\nu}^{\beta}. \quad (185)$$

No espaço-tempo quadridimensional o determinante do tensor métrico é negativo,

$$\mathbf{det}\{g_{\mu\nu}\} = -\mathbf{det}\{J\}^2 \quad (186)$$

Define-se,

$$-g \equiv \mathbf{det}\{g_{\mu\nu}\}. \quad (187)$$

$$\boxed{S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x} \quad (188)$$

Assume-se que a densidade de lagrangiano é fixa nos extremos do volume quadridimensional. Assim ao calcular o extremo da ação obtêm-se as equações que descrevem a dinâmica do sistema em termos da densidade de lagrangiano.

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} x^{\nu})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (189)$$

A teoria da relatividade é inspirada na teoria da elasticidade em que o espaço-tempo é deformado pela presença da energia e massa. A deformação ou curvatura do espaço-tempo é resultado da tensão causada pela massa gravitacional. A energia está contida na deformação do espaço-tempo. Na ação de Albert Einstein (1879-1955) e David Hilbert utiliza-se o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci para obter as equações dinâmicas da relatividade geral que descrevem a dinâmica do sistema.

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} dx^4 \quad (190)$$

em que $\kappa = 8\pi G_{Newton}/c^4$ é a constante gravitacional.

Aplica-se o princípio da mínima ação relativística para obter as equações de campo de Albert Einstein.

$$0 = \delta S = \int \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \sqrt{-g}) dx^4 \quad (191)$$

$$= \int [\delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g})] dx^4 \quad (192)$$

Usa-se que $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})$.

$$\delta S = \int \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta(g^{\mu\nu}) \sqrt{-g} dx^4 + \int g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} dx^4 \quad (193)$$

em que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

O segundo termo pode ser transformado em um termo de superfície que é nulo pois assume-se que a superfície é estacionária. Como $\delta(g^{\mu\nu})$ é uma variação arbitrária obtém-se as equações de campo de Albert Einstein no vácuo.

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0} \quad (194)$$

Para incluir a matéria acrescenta-se o termo \mathcal{L}_m à densidade de lagrangiano. Esse termo está associado à densidade de energia da matéria,

$$\mathcal{S} = \int (\mathcal{L} + \mathcal{L}_m) \sqrt{-g} d^4x \quad (195)$$

De maneira que, define-se

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\partial(\partial g^{\mu\nu}/\partial x^\gamma)} \right] \quad (196)$$

Na presença de matéria e ao incluir a constante cosmológica, Λ , obtém-se,

$$\boxed{R_{\mu\nu} + \left(\Lambda - \frac{1}{2} R \right) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}} \quad (197)$$

em que $\kappa = 8\pi G_{Newton}/c^4 = 2,077 \times 10^{-43} N^{-1}$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-tensão.

$$T_{\mu\nu} = T^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \quad (198)$$

em que $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$.

$$T^{00} \longrightarrow \text{Densidade de energia} \quad (199)$$

$$T^{0i} \longrightarrow \text{Densidade de momento} \quad (200)$$

$$T^{i0} \longrightarrow \text{Fluxo de energia} \quad (201)$$

$$T^{ii} \longrightarrow \text{Pressão} \quad (202)$$

$$T^{ij} \longrightarrow \text{Tensão de cisalhamento} \quad (203)$$

Para que a energia não-gravitacional seja conservada,

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (204)$$

Ação de Einstein-Hilbert com a constante cosmológica pode ser escrita,

$$S_{EH} = \int \mathcal{L} dx^4 \quad (205)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) \quad (206)$$

em que $\kappa = 8\pi G_{Newton}/c^4$.

A constante cosmológica foi introduzida à mão para possibilitar que o Universo fosse estável. Com os indícios experimentais que o Universo está em expansão, Albert Einstein teria dito: “*that was the biggest blunder of my life*”. Atualmente a constante cosmológica é utilizada para representar a matéria escura do Universo. Cerca de 23% da massa do Universo é classificada como matéria escura e cerca de 73% é classificada como energia escura e 1% é formada por estrelas e neutrinos. O restante é composto por gás de hidrogênio e hélio.

1. Solução de Friedmann e LeMaitre

A equação de campo de Albert Einstein foi resolvida por Alexander Alexandrovich Friedmann (1888-1925) e por Georges Henri Joseph Édouard Lemaître (1894-1966) para o Universo isotrópico e homogêneo descrito pela métrica,

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\sigma^2 \quad (207)$$

em que $d\sigma^2 = \frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$.

Pode-se calcular o tensor de Ricci para essa métrica.

- Em coordenadas cartesianas:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (208)$$

$$R_{ii} = \frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \quad (209)$$

$$R = \frac{6}{c^2 a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2) \quad (210)$$

- Em coordenadas esféricas:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (211)$$

$$R_{rr} = \frac{\frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2k}{1 - kr^2} \quad (212)$$

$$R_{\theta\theta} = r^2 \left(\frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2k \right) \quad (213)$$

$$R_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \left(\frac{1}{c^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) + 2k \right) \quad (214)$$

$$R = \frac{6}{c^2 a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + kc^2) \quad (215)$$

Considere-se a equação de campo de Einstein para o Universo isotrópico e homogêneo,

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (216)$$

Para $\mu = \nu = 0$, $g^{00} = -\frac{1}{c^2}$ e $g_{00} = -c^2$

$$R_{00} + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R\right)g_{00} = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4}T_{00} \quad (217)$$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\Lambda - 3\left(\frac{\ddot{a}}{c^2a} + \frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} + \frac{k}{a^2}\right)\right)(-c^2) = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4}\rho c^4 \quad (218)$$

$$\left(\Lambda - 3\left(\frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} + \frac{k}{a^2}\right)\right)(-c^2) = 8\pi G_{Newton}\rho \quad (219)$$

Obtem-se a primeira equação de Alexander Friedmann,

$$\boxed{\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G_{Newton}}{3}\rho} \quad (220)$$

A partir dessa equação observa-se que a constante cosmológica pode ser considerada uma correção para a densidade do Universo.

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G_{Newton}}{3}\left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G_{Newton}}\right) = \frac{8\pi G_{Newton}}{3}\rho' \quad (221)$$

Calcula-se o traço da equação de campo, $\text{Tr}\{T_{\mu\nu}\} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$,

$$R + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R\right)\text{Tr}\{g_{\mu\nu}\} = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4}(\rho c^2 - 3p)c^2 \quad (222)$$

$$R + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R\right)(3 - c^2) = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4}(\rho c^2 - 3p)c^2 \quad (223)$$

$$6\left(\frac{\ddot{a}}{c^2a} + \frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} + \frac{k}{a^2}\right) + \left(\Lambda - \frac{1}{2}R\right)(3 - c^2) = \frac{8\pi G_{Newton}}{c^4}(\rho c^2 - 3p)c^2 \quad (224)$$

Obtem-se a segunda equação de Alexander Friedmann,

$$\boxed{2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G_{Newton}}{c^2}p} \quad (225)$$

Define-se o parâmetro de densidade,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (226)$$

em que $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G_{Newton}}$ e H é o parâmetro de Hubble.

$$\Omega < 1 \longrightarrow \text{Universo aberto} \quad (227)$$

$$\Omega = 1 \longrightarrow \text{Universo plano} \quad (228)$$

$$\Omega > 1 \longrightarrow \text{Universo fechado} \quad (229)$$

A solução dessas equações resulta em modelo para a expansão do Universo e na proposta do grande pipôco primordial (*Big Bang*). Expressão criada por Fred Hoyle (1915-2001) em tom de menosprezo.

G. Ondas gravitacionais

Pode-se obter solução oscilatória para as equações de campo que viajam na velocidade da luz. Essas soluções são conhecidas como **ondas gravitacionais**. Elas foram aparentemente detectadas em 2015 produzidas pela colisão de dois buracos negros pela técnica de interferometria a LASER, LIGO - *Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*. Embora ainda existam dúvidas sobre esse resultado. A primeira evidência foi apresentada por Russel Hulse em 1974 ao considerar o movimento de um par de estrelas de neutrons.

- B. P. Abbott et al. *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*, Phys. Rev. Letters, **116**, 061102 (2016).
- Andrzej Królak, Mandar Patil, *The first detection of gravitational waves*, arXiv:1708.00918 (2017).
- Michael Brooks, *Exclusive: grave doubts over LIGO's discovery of gravitational waves*, New Scientist (2018).

H. Campo eletromagnético

As equações de Maxwell podem ser obtidas a partir da densidade de lagrangiano para o campo eletromagnético.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_o} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (230)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (231)$$

Obtem-se

$$-\frac{1}{\mu_o} \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + j^\nu = 0 \quad (232)$$

O que resulta na equação de Maxwell.

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_o j^\nu} \quad (233)$$

No espaço curvo essa equação também é modificada.

I. Carga relativística e o campo eletromagnético

Considere-se a densidade de lagrangiano e ação da carga relativística no campo eletromagnético no espaço plano. Para a carga relativística a densidade de Lagrangiano depende apenas de termos em $\partial_0 x_\nu = c^{-1} \partial x_\nu / \partial \tau$. De maneira que o lagrangiano consiste do termo associado à partícula, o termo associado à interação entre a partícula e o campo eletromagnético e o termo associado ao campo eletromagnético,

$$\mathcal{S} = \int L d\tau = \int \left(-mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} - \int j^\mu A_\mu d^3x - \frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^3x \right) d\tau \quad (234)$$

em que $j^\mu = (c\rho, \vec{J})$, $A^\nu = (\phi/c, \vec{A})$ e $j^\mu A_\mu = j^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu = \rho\phi - \vec{J} \cdot \vec{A}$.

Para a carga no espaço a densidade de corrente é proporcional à velocidade,

$$\int j^\mu A_\mu d^3x = qU^\mu A_\mu. \quad (235)$$

em que $\rho = q\delta(\vec{r})$, $U^\nu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$, $U_\nu = \eta_{\nu\mu} U^\mu = \gamma(c, -v_x, -v_y, -v_z)$ e $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_0 x^\nu)} \right) = -m\gamma \eta_{\mu\nu} \frac{dU^\mu}{d\tau} + q \frac{dA_\nu}{d\tau} \quad (236)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\nu} = qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (237)$$

Então pode-se obter a expressão da equação que descreve a dinâmica.

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial U^\nu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = -m\gamma \frac{dU_\nu}{d\tau} + q \frac{dA_\nu}{d\tau} - qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = 0 \quad (238)$$

$$m\gamma \frac{dU_\nu}{d\tau} = q \frac{dA_\nu}{d\tau} - qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = qU^\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - qU^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = qU^\mu F_{\mu\nu} \quad (239)$$

Portanto, ao aplicar o princípio da mínima ação obtém-se a equação da força de Lorentz.

$$\boxed{\frac{dp_\nu}{d\tau} = qU^\mu F_{\mu\nu} \longrightarrow \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}} \quad (240)$$

J. Kaluza-Klein

A métrica na teoria de Kaluza-Klein é definida pela matriz simétrica γ_{ab} , 5×5 . De maneira que o elemento de distância pode ser escrito,

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2\gamma_{\mu 5} dx^\mu dx^5 + \gamma_{55} dx^5 dx^5 \quad (241)$$

A densidade de lagrangiano pode ser escrita de maneira semelhante ao lagrangiano de Einstein-Hilbert em termos do tensor de curvatura de Ricci, R_{KK} , em cinco dimensões (Equação 190).

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{16\pi G_{KK}} R_{KK} = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G_{KK} e^{-\sigma}} \left(R - \frac{\kappa^2}{4} e^{2\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2e^{-\sigma} \square e^{\sigma} \right) \quad (242)$$

em que $\gamma = \det\{\gamma_{ab}\}$, G_{KK} é o equivalente da constante gravitacional e $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ é o d'Alambertiano.

Essa densidade de lagrangiano descreve o acoplamento entre gravitação e eletromagnetismo. Ao minimizar a ação obtém-se 15 equações:

- 10 equações modificadas de Einstein.
- 4 equações modificadas de Maxwell.
- 1 equação para o campo escalar.

Para confirmar experimentalmente essa teoria deve-se examinar o acoplamento do campo escalar σ com o espaço-tempo da gravitação. Esse campo escalar está relacionado com o tamanho da quinta dimensão. Esse tipo de investigação também é importante na teoria da corda que faz uso da ideia de dimensões extras.

- R. Coquereaux, G. Esposito-Farese, *The theory of Kaluza-Klein-Jordan-Thiry revisited*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **52** (2), 113-150 (1990).

K. Corda relativística

O conceito de corda foi inicialmente proposto na década de 1960 como um modelo para descrever a força forte. Essa força é que mantém os quarks fortemente ligados. Considere-se dois entes de massa $m = M/2$ acoplados e que giram com velocidade relativística em torno do centro de massa. Esse sistema pode ser um modelo para o méson de massa M que é composto de dois quarks fortemente ligados. O momento da partícula no referencial do centro de massa,

$$p = (\mathcal{E}/c, \vec{p}) \longrightarrow p^\mu p_\mu = \mathcal{E}^2/c^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2 \quad (243)$$

Para velocidade da ordem da velocidade da luz,

$$|\vec{p}|c = mc \frac{dX}{d\tau} = mc \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} mc \gg mc^2. \quad (244)$$

Define-se s como o quadrado da energia no sistema de referência do centro de massa.

$$s = \mathcal{E}^2 = (2M/2)^2 c^4 + (2|\vec{p}|)^2 c^2 = M^2 c^4 + (2|\vec{p}|)^2 c^2 \approx (2|\vec{p}|c)^2 \implies 2|\vec{p}| = \frac{\sqrt{s}}{c} \quad (245)$$

A distância entre cada ente relativístico e o centro de massa é dada por r . Calcula-se o momento angular do conjunto de entes relativísticos que giram em torno do centro de massa.

$$J = |\vec{p}|r + |\vec{p}|r = 2|\vec{p}|r \implies r = \frac{J}{2|\vec{p}|} = \frac{cJ}{\sqrt{s}} \quad (246)$$

A força centrípeta.

$$F_c \approx \frac{|\vec{p}|c}{r} = \frac{c\sqrt{s}}{2c} = \frac{s}{2cJ} \quad (247)$$

Experimentalmente observa-se que a amplitude do espalhamento é uma função do momento angular e que o momento angular é uma função linear do quadrado da energia, denominado de trajetória de Tullio Regge (1931-2014), $J = \alpha(s) = \alpha's + \alpha(0)$ em que $\alpha' = 1 \text{ GeV}^{-2}$. Assume-se que $\alpha's \gg \alpha(0)$, despreza-se $\alpha(0)$ e substitui-se na equação anterior para obter a expressão da força que resulta na trajetória de Regge.

$$F_c = \frac{s}{2c\alpha's} = \frac{1}{2\alpha'c} \quad (248)$$

Obtem-se que a força é constante e como a força é o gradiente da energia potencial, a energia potencial aumenta linearmente com a separação.

1. Modelo de vórtice

Um modelo mais adequado deve considerar a energia do campo de força, i.e., a energia da conexão ou “corda”. Nesse modelo a conexão entre as duas partículas é via um tubo fino ou vórtice. O tubo transporta toda a energia de interação como uma corda de comprimento $2r$ que conecta os dois quarks que compõem o méson. A força da interação é o gradiente da energia ao longo do tubo ou vórtice.

$$|F| = \left| -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \right| \quad (249)$$

Assume-se que o tubo ou vórtice transporta energia por unidade de comprimento, T , e despreza-se a contribuição das partículas para a energia. A energia por unidade de comprimento, T , é a tensão no vórtice ou “corda”. Assume-se ainda que as extremidades do tubo ou “corda” gira com velocidade próxima da velocidade da luz, i.e., tem-se uma “corda” que gira com velocidade angular relativística. De maneira que a velocidade em um ponto x ao longo do tubo a partir do centro de massa pode ser aproximado,

$$v(x) = \frac{c}{r}x, \quad \omega = \frac{v(x)}{x} = \frac{c}{r}. \quad (250)$$

No referencial do laboratório escreve-se a energia total,

$$\mathcal{E} = \int_{-r}^r T\gamma dx = \int_{-r}^r \frac{T}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dx. \quad (251)$$

Usa-se que $v(x) = \frac{c}{r}x$ e se faz a mudança de variável $x' = x/r = \text{sen}\theta$.

$$\mathcal{E} = rT \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} dx' = 2rT \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} dx' = 2rT \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi rT \quad (252)$$

Momento angular.

$$J = \int dJ = \int \frac{1}{\omega} d\mathcal{E} = \int_{-r}^r \frac{Tx}{v} \gamma dx = \frac{\pi rT}{\omega} = \frac{\pi r^2 T}{c} \quad (253)$$

Divide-se o quadrado da energia pelo momento angular para obter a tensão na corda. Usa-se a observação experimental da trajetória de Regge, $J = \alpha(s) = \alpha's + \alpha(0)$ em que $\alpha' = 1 \text{ GeV}^{-2}$. Assume-se que $\alpha's \gg \alpha(0)$ e despreza-se $\alpha(0)$.

$$\boxed{\frac{\mathcal{E}^2}{J} = \pi c T \implies T = \frac{\mathcal{E}^2}{\pi c J} = \frac{s}{\pi c \alpha' s} = \frac{1}{\pi \alpha' c} = \frac{2F_c}{\pi}} \quad (254)$$

2. Ação relativística da corda clássica

Para obter a ação relativística para a corda livre considere-se a densidade de energia para obter o lagrangiano.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dl} = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (255)$$

$$\mathcal{E}_p = \int \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dl \quad (256)$$

$$\mathcal{E}_c = \int \frac{Tv^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dl \quad (257)$$

$$L = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p \quad (258)$$

$$= - \int T \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dl \quad (259)$$

$$= - \int T \sqrt{1 - v^2/c^2} dl \quad (260)$$

$$= - \int \frac{1}{\gamma} T dl \quad (261)$$

Agora pode-se avaliar a ação.

$$S = \int L dt = \int \left[- \int \frac{1}{\gamma} T dl \right] dt = - \int \int \frac{T}{c} dl d\tau \quad (262)$$

No referencial do laboratório para o espaço plano,

$$\boxed{S = - \int \frac{T}{c} \sqrt{-g} dA.} \quad (263)$$

Na teoria tradicional a partícula é “pontual”, i.e., tem apenas o tempo como parâmetro, e ao evoluir pelo espaço-tempo traça uma trajetória do tipo linha ou linha-existencial (*world-line*), como ilustrado na Figura 2a. A corda relativística é uma linha e ao evoluir pelo espaço-tempo traça a superfície-existencial (*world-sheet*), como ilustrado na Figura 2b. O elemento $dl d\tau$ é o elemento de área na superfície-existencial. É mais comum utilizar a letra σ para indicar a posição na corda. Assim, a evolução é parametrizada por τ e σ .

Para o caso mais geral em que se tem uma membrana no espaço de dimensão $D > p + 1$, ela é denominada de p -brana. A membrana no espaço tridimensional é uma 2-brana. Ao

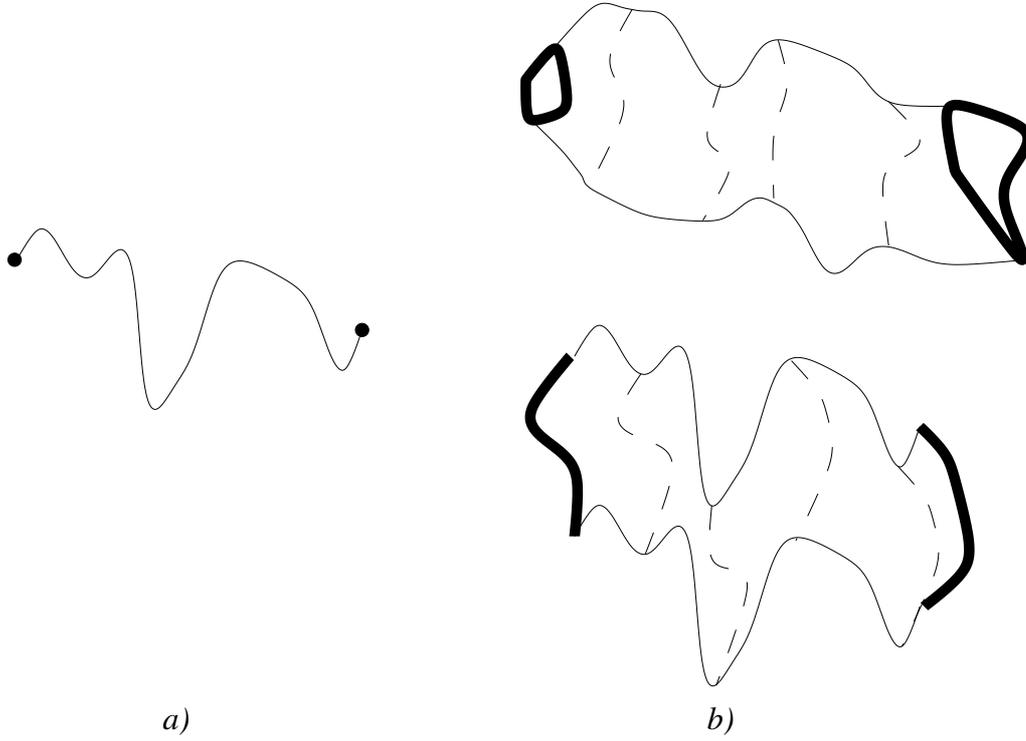


FIG. 2. Trajetórias. a) linha-existencial. b) Superfície-existencial.

propagar a p -brana gera-se o volume existencial com $p + 1$ dimensões no espaço de D dimensões em que $p < D$. De maneira que a ação associada à p -brana,

$$S_p = - \left(\frac{\mathcal{E}_p}{V_p} \right) \int d\mu_p \quad (264)$$

em que V_p é o volume generalizado da p -brana e a razão energia por unidade de volume é denominada de tensão generalizada.

$$d\mu_p = \sqrt{\mathbf{det}\{G_{\alpha\beta}\}} d^{(p+1)}\sigma \quad (265)$$

em que $G_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu$ e $\alpha, \beta = 0, \dots, p$.

O grande desafio é introduzir a quantização da p -brana.

- Edmund Bertschinge, *Symmetry transformations, the Einstein-Hilbert action, and gauge invariance*, Physics 8.962, Massachusetts Institute of Technology, 26pp (2002).
- Ian D. Lawrie, *A unified grand tour of theoretical physics*, 2ª Ed., Institute of Physics Publishing, Bristol (2002).
- Gerard 't Hooft, *Introduction to string theory*, Lecture notes 2003 and 2004, Institute for Theoretical Physics, Utrecht, the Netherlands, 79 páginas (2004).
- J. Güémez, M. Fiolhais, L. A. Fernández, *Relativistic rotation - how does the energy vary with angular momentum*, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1141 (2018) 012131.

IV. TEORIA QUÂNTICA

A quantização da energia foi estabelecida em 1899 por Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947). Assim, uma área de investigação do início do século XX era a obtenção da mecânica quântica para descrever a dinâmica do sistema. Os primeiros passos da mecânica quântica foram dados por Werner Karl Heisenberg (1901-1976) e Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961) de forma independente, mas de maneira equivalente. Werner Heisenberg obteve equações dinâmicas na forma matricial para descrever a evolução quântica das grandezas observáveis. Com isso ele criou a representação matricial para a evolução dessas grandezas, conhecida hoje como o cenário ou visão de Heisenberg, mas não ficou confortável com o fato que nessa representação as grandezas observáveis não comutam, i.e., a ordem da operação resulta em diferentes valores. Como não são números pertencentes ao conjunto dos números reais, não há como garantir que a operação com eles seja comutativa. Em geral $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Erwin Schrödinger seguiu um caminho diferente. Ele se baseou nas ideias de Louis Victor Pierre Raymond (1892-1987), duque de Broglie, para obter uma equação da onda. Inicialmente tentou usar a mecânica da teoria restrita da relatividade. Para isso ele substituiu as grandezas por operadores diferenciais para obter a equação da onda. No entanto, a tentativa inicial de usar a teoria da relatividade para reproduzir o espectro eletromagnético atômico foi um fracasso e Erwin Schrödinger abandonou a ideia decepcionado. Ele não conseguiu reproduzir o resultado obtido por Niels Henrik David Bohr (1885-1962) com as órbitas atômicas. Essa estratégia foi abandonada e E. Schrödinger passou a utilizar a energia não-relativística. Com a nova equação ele conseguiu reproduzir os resultados de Niels Bohr e obteve grande sucesso. No cenário ou visão de Schrödinger,

$$\mathcal{E} \longrightarrow \hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (266)$$

$$\mathcal{E}_c \longrightarrow \hat{E}_c = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (267)$$

$$r \longrightarrow \hat{r} = r \quad (268)$$

$$p \longrightarrow \hat{p} = -i\hbar \nabla \quad (269)$$

$$L \longrightarrow \hat{L} = \vec{r} \times (-i\hbar \nabla) \quad (270)$$

Nesse processo surge a função de onda, um conceito matemático misterioso associado à partícula. A função de onda descreve o estado da partícula. De posse do estado pode-se calcular o valor esperado das observáveis, incerteza quântica e correlações.

Essa equação da onda com base na teoria da relatividade foi obtida independentemente por Oskar Klein (1894-1977) - Walter Gordon (1893-1939) e hoje a equação tem o nome deles. Embora a equação de Klein-Gordon tenha ficado durante um tempo como curiosidade por resultar em estados quânticos com energia negativa.

$$-\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Psi_{KG}(\vec{r}, t) + m^2 c^4 \Psi_{KG}(\vec{r}, t) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi_{KG}(\vec{r}, t) \quad (271)$$

Na teoria quântica criada por Werner Heisenberg e Erwin Schrödinger é introduzido o conceito que as grandezas físicas passam a ser operadores. A forma do operador vai depender do cenário utilizado. Nessa teoria quântica apenas a energia da matéria era quantizada, representada pela quantização da energia do elétron. A interação era tratada classicamente.

Átomos podem ser aproximados por uma caixa de potencial de largura igual a aproximadamente 0,1 nm. Quando se considera elétrons confinados em átomos pode-se estimar a razão $\beta = v/c$ com base no princípio da incerteza.

$$\beta = \frac{v}{c} \approx \frac{2\pi\hbar}{m_e c \Delta r} = 0,02 \quad (272)$$

Como a velocidade do elétron é muito menor que a velocidade da luz, muitas propriedades de átomos podem ser descritas sem a necessidade de considerar efeitos relativísticos o que explica o sucesso obtido por Erwin Schrödinger com essa aproximação. No entanto, para compreender algumas discrepâncias com resultados experimentais, compreender decaimento radiativo e o próprio núcleo novos conceitos eram necessários. A teoria quântica antiga apresenta diversas limitações:

- Energia não-relativística.
- O tempo é tratado de maneira separada do espaço.
- A função de onda é eterna, não pode ser criada ou destruída.
- A quantidade de partículas é constante, i.e., o sistema é fechado.
- Não explica o momento angular intrínscio, *spin*.
- Como a energia é definida, a incerteza no tempo é infinita, não se poderia mudar de estado.
- Em aplicações reais é difícil conhecer o estado inicial.
- A dificuldade de incluir o processo de medição.
- O estado quântico define o sistema em todo o Universo.
- A interação é clássica.

Como a quantização da energia do fóton, que representa a interação, também já era conhecida, em seguida foi desenvolvida a teoria da quantização combinada da energia da matéria e da energia da interação. Esse desenvolvimento é conhecido como **segunda quantização**.

De acordo com a interpretação de Max Born (1882-1970) a densidade de probabilidade de encontrar a partícula está relacionada com o quadrado do módulo da função de onda. Nesse contexto, a fase da função de onda parece não ter grande relevância. Assim, funções de onda cuja única diferença é a fase,

$$\Psi(r) \quad \text{e} \quad \Psi'(r) = \Psi(r)e^{i\theta(r)} \quad (273)$$

representariam o mesmo fenômeno.

$$\mathcal{P}(r) = |\Psi'(r)|^2 = \Psi'^*(r)\Psi'(r) = \left(\Psi(r)e^{i\theta(r)}\right)^* \Psi(r)e^{i\theta(r)} = |\Psi(r)|^2 \quad (274)$$

Calcule-se a derivada para avaliar o operador momento linear para um estado quântico em que a fase depende da posição.

$$\frac{\partial\Psi'(r)}{\partial r} = \frac{\partial\Psi(r)}{\partial r}e^{i\theta(r)} + i\Psi(r)e^{i\theta(r)}\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} \quad (275)$$

$$\frac{\partial\Psi'(r)}{\partial r} - i\Psi'(r)\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} = \frac{\partial\Psi(r)}{\partial r}e^{i\theta(r)} \quad (276)$$

Para a fase dependente da posição é necessário redefinir o operador momento linear, \hat{p} , para que representem o mesmo fenômeno.

$$\hat{p}' = -i\hbar\frac{D}{Dr} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial\theta(r)}{\partial r}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r} - \hbar\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} = \hat{p} - \hbar\frac{\partial\theta(r)}{\partial r} \quad (277)$$

Com essa definição o operador energia que é proporcional à $\hat{p}^\dagger \hat{p}$ não é afetado pela fase,

$$\frac{D\Psi'(r)}{Dr} = e^{i\theta(r)} \frac{D\Psi(r)}{Dr} \quad (278)$$

No eletromagnetismo também existe a possibilidade de múltiplos potenciais resultarem na mesma descrição do fenômeno. Essa multiplicidade aparece na representação do campo pelo potencial.

$$\vec{E} = -\nabla \left(V - \frac{\partial\chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial(\vec{A} + \nabla\chi)}{\partial t} \quad (279)$$

$$\vec{B} = -\nabla \times (\vec{A} + \nabla\chi) \quad (280)$$

em que $\nabla \times \nabla\chi = 0$ é uma identidade matemática.

De acordo com o lagrangiano da partícula na presença de campo magnético na Equação 166 o momento linear,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} - eA. \quad (281)$$

Essa equação pode ser estendida,

$$p = m\dot{r} - eA - e\nabla\chi \quad (282)$$

Ao se comparar com a equação quântica conclui-se que a função χ está relacionada com a fase da função de onda.

$$e\chi = \hbar\theta(r) \quad (283)$$

Para o caso particular em que

$$\vec{A} = \nabla\eta \quad (284)$$

Obtem-se que o vetor potencial modifica a fase da função de onda mesmo que o campo magnético seja nulo ($\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \nabla\eta = 0$).

$$\Psi(r) e^{i\frac{e}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{r}} \quad (285)$$

A variação da fase da função de onda em termos do vetor potencial é observado experimentalmente e é conhecido como efeito Yakir Aharonov (1932-) - David Joseph Bohm (1917-1992). Esse efeito é explicado com a teoria quântica. A consequência desse resultado é que a aparente incerteza da fase tem um significado profundo e está associada à interação.

A fase da função de onda está relacionada com o processo de interação.

Os valores da exponencial complexa da fase, $e^{i\theta}$, é um número dentro do conjunto de elementos do círculo unitário. O conjunto desses números com uma operação com as propriedades de fechamento, elemento neutro e inverso forma um grupo matemático ou grupo de Lie, conhecido como grupo de simetria $U(1)$ em que U significa unitário. Pode-se reescrever a relação entre as duas funções de onda e os dois momentos lineares com a transformação unitária, $U(1) = e^{i\theta(r)}$. Note-se que $U(1)$ é o conjunto de todos os números complexos com norma (módulo) igual a unidade.

$$\Psi'(r) = U(1)\Psi(r) \quad (286)$$

$$\frac{D\Psi'(r)}{Dr} = U(1)\frac{D\Psi(r)}{Dr} \quad (287)$$

Note-se que essa transformação unitária apresenta apenas um grau de liberdade interno, i.e., é representado por um número apenas, e está associada a apenas uma partícula de interação, o fóton.

A. Equação de Dirac

Para obter a teoria quântica dentro do formalismo relativístico Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), que era formado em engenharia elétrica, elaborou uma nova equação para descrever o comportamento do elétron. Ele fez a proposta brilhante de escrever uma equação de primeira ordem cujo quadrado é a energia relativística.

$$\left(\sum_{k=1}^3 \alpha_k p_k c + \beta mc^2 \right) \Psi_D(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi_D(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (288)$$

Posteriormente fez-se a substituição $\beta = \gamma^0$ e $\beta\alpha_k = \gamma^k$. Multiplica-se a Equação 288 por γ^0 .

$$\left(\sum_{k=1}^3 \gamma^k p_k c + mc^2 \mathbb{I} \right) \Psi_D(\vec{r}, t) = i\hbar \gamma^0 \frac{\partial \Psi_D(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (289)$$

em que γ^k são matrizes de ordem 4 que podem ser escritas em termos das matrizes de Pauli.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (290)$$

Ao elevar esse equação ao quadrado obtém-se a energia relativística,

$$m^2 c^4 + p^2 c^2 = \mathcal{E}^2. \quad (291)$$

Pode-se escrever o conjunto de quatro equações na notação da teoria da relatividade.

$$\boxed{i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_D - mc \Psi_D = 0} \quad (292)$$

em que $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$, $\partial^\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$ e $\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3$.

Com essa equação Paul Dirac realizou a unificação da teoria quântica com a teoria restrita da relatividade.

Na notação de Richard Feynmann, $\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 \rightarrow \not{\partial}$. De maneira que se escreve a equação de Paul Dirac,

$$i\hbar \not{\partial} \Psi_D - mc \Psi_D = 0. \quad (293)$$

A solução da equação de Schrödinger é uma função unidimensional denominada *função de onda*, i.e., ao escolher uma posição no espaço-tempo obtém-se um número complexo, enquanto a solução da equação de Dirac é uma função quadridimensional denominada **spinor**, i.e., ao escolher uma posição no espaço-tempo obtém-se um vetor quadridimensional.

$$\begin{aligned} \text{Solução de Schrödinger} &\rightarrow \Psi_S(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C} \\ \text{Solução de Dirac} &\rightarrow \Psi_D(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4 \end{aligned} \quad (294)$$

Na notação de Dirac, o spinor é escrito com colchetes $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

$$\Psi_D(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \equiv \langle \vec{r}, t | \Psi_D \rangle \quad (295)$$

1. Soluções

Para ondas planas, $\Psi_D(x^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ik_\mu x^\mu} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)}$, obtém-se duas equações com spinor, ϕ e χ , de dimensão dois. Assim obtém-se duas equações.

$$(\hbar\gamma^\mu k_\mu - mc\mathbb{I}) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (\frac{\mathcal{E}}{c} - mc) & -\sum_i \hbar\sigma^i k_i \\ -\sum_j \hbar\sigma^j k_j & (\frac{\mathcal{E}}{c} + mc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (296)$$

em que $k_\mu = (\omega/c, -k_x, -k_y, -k_z)$ e assinatura da métrica $(+ - - -)$.

Multiplica-se $(\frac{\mathcal{E}}{c} + mc)$ na primeira equação e utiliza-se a segunda equação para obter

$$\left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - mc^2\right) \phi - \hbar^2 \left(\vec{k} \cdot \vec{k}\mathbb{I} + i(\vec{k} \times \vec{k}) \cdot \sigma\right) \phi = 0 \implies \mathcal{E}^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (297)$$

Obtem-se o mesmo resultado com a segunda equação ao multiplicá-la por $(\frac{\mathcal{E}}{c} - mc)$.

Para a partícula livre em repouso, $\vec{k} = \vec{0}$, considere-se $\Psi_D(x^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i\mathcal{E}t/\hbar}$.

$$\begin{cases} (\mathcal{E} - mc^2) \phi = 0 \\ (\mathcal{E} + mc^2) \chi = 0 \end{cases} \quad (298)$$

Obtem-se que para

- $\mathcal{E} = mc^2 \Rightarrow \phi \neq 0, \chi = 0$ e
- $\mathcal{E} = -mc^2 \Rightarrow \phi = 0, \chi \neq 0$.

Em termos do spinor,

$$\text{Energia positiva: } \phi \neq 0, \quad \Psi_1 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar}, \quad \Psi_2 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imc^2 t/\hbar} \quad (299)$$

$$\text{Energia negativa: } \chi \neq 0, \quad \Psi_3 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imc^2 t/\hbar}, \quad \Psi_4 = \mathcal{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imc^2 t/\hbar} \quad (300)$$

em que \mathcal{N} é o fator de normalização.

Considere-se o caso em que $\vec{k} \neq 0$.

$$\begin{cases} \phi = \frac{\hbar c}{(\mathcal{E}-mc^2)} \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix} \chi \\ \chi = \frac{\hbar c}{(\mathcal{E}+mc^2)} \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix} \phi \end{cases} \quad (301)$$

Em termos do spinor,

$$\Psi_1 = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x+ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi_2 = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\hbar c(k_x-ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{-\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} \quad (302)$$

$$\Psi_3 = \mathcal{N}_3 \begin{pmatrix} \frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}-mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x+ik_y)}{(\mathcal{E}-mc^2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi_4 = \mathcal{N}_4 \begin{pmatrix} \frac{\hbar c(k_x-ik_y)}{(\mathcal{E}-mc^2)} \\ \frac{-\hbar ck_z}{(\mathcal{E}-mc^2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} \quad (303)$$

Note-se que no limite em que $\vec{k} = 0$, obtem-se que Ψ_1 e Ψ_2 são as soluções com energia positiva. Para que Ψ_3 e Ψ_4 apresentem o comportamento correto para $\vec{k} = 0$, é necessário que $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$.

Para obter as outras soluções, considere-se ondas planas, $\Psi_D(x^\mu) = \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix} e^{+ik_\mu x^\mu} = \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)}$. Obtem-se duas equações com spinor, ϕ' e χ' , de dimensão dois.

$$(\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc\mathbb{1}) \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (\frac{\mathcal{E}}{c} + mc) & -\sum_i \hbar\sigma^i k_i \\ -\sum_j \hbar\sigma^j k_j & (\frac{\mathcal{E}}{c} - mc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (304)$$

em que $k_\mu = (\omega/c, -k_x, -k_y, -k_z)$ e assinatura da métrica $(+ - - -)$.

Note-se que essa equação é igual à Equação 296 se for feita a identificação.

$$\phi' \rightarrow \chi \quad (305)$$

$$\chi' \rightarrow \phi \quad (306)$$

Em termos do spinor,

$$\Psi'_1 = \mathcal{N}'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}-mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x+ik_y)}{(\mathcal{E}-mc^2)} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi'_2 = \mathcal{N}'_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\hbar c(k_x-ik_y)}{(\mathcal{E}-mc^2)} \\ \frac{-\hbar ck_z}{(\mathcal{E}-mc^2)} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} \quad (307)$$

$$\Psi'_3 = \mathcal{N}'_3 \begin{pmatrix} \frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x+ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi'_4 = \mathcal{N}'_4 \begin{pmatrix} \frac{\hbar c(k_x-ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{-\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} \quad (308)$$

Note-se que no limite em que $\vec{k} = 0$, obtem-se que Ψ'_3 e Ψ'_4 são as soluções com energia negativa. Note-se ainda que para $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$ e $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ obtem-se

$$\Psi'_3 \rightarrow \Psi_3 \quad (309)$$

$$\Psi'_4 \rightarrow \Psi_4. \quad (310)$$

2. Tunelamento

Pela teoria da Erwin Schrödinger,

$$\rho = \Psi^* \Psi \quad (311)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \quad (312)$$

em que Ψ^* é o complexo conjugado.

Pela teoria da Paul Dirac,

$$\rho = \Psi^\dagger \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi \quad (313)$$

$$j_k = \Psi^\dagger \alpha_k \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \Psi = \bar{\Psi} \gamma^k \Psi \quad (314)$$

em que Ψ^\dagger é o hermitiano conjugado e $\alpha_k = \gamma^0 \gamma^k$.

Pode ser escrito como um vetor quadridimensional.

$$\boxed{j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi} \quad (315)$$

A equação de conservação é satisfeita

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (316)$$

em que $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Considere-se o fluxo na direção z no regime estacionário de maneira que $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ com *spin* “para cima” e energia positiva. Considere-se o degrau em $z = 0$ e o fluxo da esquerda para direita e incide sobre um degrau de energia potencial U_0 , conhecido como degrau de Oskar Klein.

$$\Psi_{inc} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_z z}, \quad \Psi_{ref} = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_z z} \quad (317)$$

$$\Psi_{tra} = \mathcal{N}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k'_z}{(\mathcal{E} - U_0 + mc^2)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik'_z z} \quad (318)$$

Como a equação de Paul Dirac é de primeira ordem basta impor a condição que o spinor deve ser contínuo em $z = 0$.

$$\Psi_{inc}(z = 0) + \Psi_{ref}(z = 0) = \Psi_{tra}(z = 0) \quad (319)$$

Obtem-se duas equações,

$$\begin{cases} \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_3 \\ \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2 = \kappa \mathcal{N}_3 \end{cases} \quad (320)$$

em que $\kappa = \frac{k'_z}{k_z} \frac{(\mathcal{E} + mc^2)}{(\mathcal{E} - U_0 + mc^2)}$.

$$R = \frac{j_{ref}^z}{j_{inc}^z} = \frac{\Psi_{ref}^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \Psi_{ref}}{\Psi_{inc}^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \Psi_{inc}} = \left(\frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1} \right)^2 = \left(\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \right)^2 \quad (321)$$

$$T = \frac{j_{trans}^z}{j_{inc}^z} = \frac{\Psi_{tra}^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \Psi_{tra}}{\Psi_{inc}^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \Psi_{inc}} = \kappa \left(\frac{\mathcal{N}_3}{\mathcal{N}_1} \right)^2 = \frac{4\kappa}{(1 + \kappa)^2} = 1 - R \quad (322)$$

Para determinar k'_z usa-se a energia dentro do degrau, $(\mathcal{E} - U_0)^2 = \hbar^2 k'^2_z c^2 + m^2 c^4$, para calcular a velocidade de grupo,

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{dk'_z} = \frac{1}{\hbar} \frac{k'_z c^2}{(\mathcal{E} - U_0)} \quad (323)$$

Para $\mathcal{E} < U_0$, $\hbar k'_z = -\sqrt{(U_0 - \mathcal{E})^2 - m^2 c^4} < 0$ para que a velocidade de grupo seja positiva. Nessa condição obtem-se,

$$\kappa = \frac{-k'_z}{k_z} \frac{(\mathcal{E} + mc^2)}{(U_0 - \mathcal{E} - mc^2)} = \sqrt{\frac{((U_0 - \mathcal{E}) + mc^2)(\mathcal{E} + mc^2)}{((U_0 - \mathcal{E}) - mc^2)(\mathcal{E} - mc^2)}}. \quad (324)$$

Note-se que no limite de energia potencial infinita,

$$\lim_{U_0 \rightarrow \infty} \kappa = 1. \quad (325)$$

Assim,

$$R = 0 \quad (326)$$

$$T = 1. \quad (327)$$

A probabilidade de transmissão se aproxima de 100%. Um aspecto surpreendente! Partículas com energia relativística podem tunelar quanticamente com probabilidade igual a 100%! Para energias não-relativísticas ocorre reflexão e decaimento exponencial da transmissão no degrau. Esse resultado é conhecido como paradoxo de Oskar Klein. Pode-se argumentar que um degrau de energia potencial tem largura infinita e portanto não é uma geometria fisicamente adequada. Como o campo elétrico é proporcional ao gradiente da energia, outro aspecto do degrau de energia potencial é que o campo elétrico tem que ser infinito na transição.

Uma geometria mais adequada é a barreira de potencial quadrado de largura L . Como demonstrado no Apêndice B.

$$R = \frac{(\kappa^2 - 1)^2 \text{sen}^2(k'_z L)}{4\kappa^2 + (\kappa^2 - 1)^2 \text{sen}^2(k'_z L)} \quad (328)$$

$$T = 1 - R = \frac{4\kappa^2}{4\kappa^2 + (\kappa^2 - 1)^2 \text{sen}^2(k'_z L)} \quad (329)$$

Note-se que para valores da energia em que $k'_z L = n\pi$ obtém-se $R = 0$ e $T = 1$.

$$\mathcal{E}_n = U_0 - \sqrt{m^2 c^4 + n^2 \frac{\hbar^2 c^2 \pi^2}{L^2}} \quad (330)$$

Para o caso não-relativístico em que se obtém a solução da equação de Schrödinger para $\mathcal{E} \ll U_0$, como demonstrado no Apêndice B, ocorre uma diminuição exponencial da transmissão com o aumento da largura da barreira e o aumento da energia potencial.

$$T(\mathcal{E}, L) = \frac{\psi_{S,trans}^* \psi_{S,trans}}{\psi_{S,incid,+}^* \psi_{S,incid,+}} \quad (331)$$

$$\approx 16 \frac{\mathcal{E}}{U_0} e^{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} U_0 L} \quad (332)$$

3. Interpretação

Como observado a equação de Paul Dirac também resulta em estados quânticos com energia negativa,

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (333)$$

Isso foi resolvido de maneira espetacular por Paul Dirac que sugeriu a existência de anti-partículas, o que foi confirmado em 1933 por Carl David Anderson (1905-1991). Para o elétron, tem-se o pósitron. Essa foi a primeira vez que uma partícula foi prevista matematicamente. Na interpretação de Paul Dirac os estados de energia negativa estariam todos preenchidos. Essa sugestão é para evitar que o elétron ao buscar o estado de menor energia, caia no estado de energia negativa infinita. A anti-partícula seria o equivalente à lacuna de energia ao promover o ente quântico do estado de energia negativa para o estado de energia positiva.

$$\begin{aligned} \text{Energia da lacuna} &= -\mathcal{E}_{neg} \rightarrow \text{Energia positiva} \\ \text{Carga da lacuna} &= -q_{neg} \rightarrow \text{Carga positiva} \end{aligned} \quad (334)$$

Essa interpretação é conhecida como **teoria do buraco** que foi utilizada por William Bradford Shockley Jr. (1910 - 1989) para explicar a lacuna como portador de carga no semiconductor. No entanto, essa interpretação causa problemas quando se tenta estender a teoria quântica do campo para os entes quânticos do tipo bóson, como o fóton, que não está sujeito ao princípio de exclusão de Wolfgang Ernst Pauli (1900 - 1958). Enquanto cada estado quântico de férmion só pode conter apenas um férmion, estado quântico de bóson pode conter infinita quantidade de bósons. Assim, uma nova interpretação era necessária, que foi proposta em 1941 Ernst Carl Gerlach Stückelberg (1905-1984) e em 1948 do Richard Feynmann. As soluções com energia negativa é equivalente a soluções com quadrimomento, $p = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$, negativo. Essas soluções são as que devem ser utilizadas para representar a anti-partícula, como ilustrado na Figura 3.

$$-|q|(\mathcal{E}/c, \vec{p}) \longrightarrow |q|(-\mathcal{E}/c, -\vec{p}) \quad (335)$$

$$\Psi_1 = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x + ik_y)}{(\mathcal{E} + mc^2)} \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi_2 = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\hbar c(k_x - ik_y)}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ \frac{-\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (336)$$

$$\Psi'_3 = \mathcal{N}_3 \begin{pmatrix} \frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x + ik_y)}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi'_4 = \mathcal{N}_4 \begin{pmatrix} \frac{\hbar c(k_x - ik_y)}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ \frac{-\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (337)$$

Com essa escolha de soluções as partículas e anti-partículas têm energia positiva. A energia negativa equivale à partícula com quadrimomento negativo. A emissão de uma antipartícula com quadrimomento p^μ é equivalente fisicamente à absorção de uma partícula com quadrimomento $-p^\mu$ e vice-versa. Além disso, com essa interpretação a equação de Klein-Gordon, Equação 271, é resgatada e é aplicada a bósons.

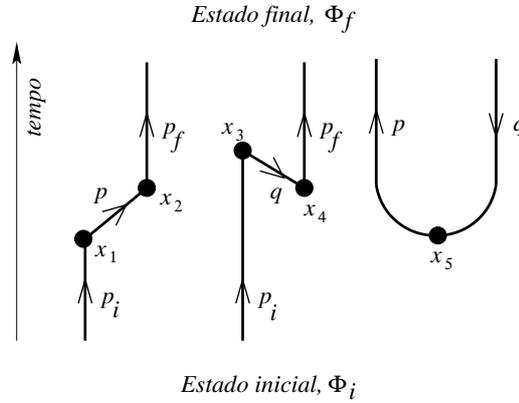


FIG. 3. Diagramas de Richard Feynman. Soluções que voltam no tempo são reinterpretadas como antipartículas. As partículas com quadrimomento negativo q são as antipartículas.

Ao introduzir a teoria da relatividade na mecânica quântica obtem-se *spin*. Inicialmente o surgimento do momento angular intrínscio, *spin*, como ingrediente da equação foi pensado ser a grande contribuição fundamental associada à introdução da teoria restrita da relatividade na teoria quântica. Observou-se posteriormente que o surgimento de antipartículas como uma necessidade para explicar as energias negativas era mais profundo. Com elas pode-se compreender a existência de férmions e bósons, i.e., pode-se explicar o princípio de exclusão de Wolfgang Pauli. A existência de antipartículas é uma necessidade de teoria restrita da relatividade combinada com a teoria quântica.

Assim, Ψ_D deixou de ser uma função e passou a ser o campo quântico, $|\Psi_D\rangle$, que pode operar sobre o espaço-tempo $\langle \vec{r}, t |$ para obter o spinor. O campo da teoria de Dirac é uma estrutura matemática abstrata. Com essa interpretação nasce a teoria do campo quântico, também conhecida como **Eletrodinâmica quântica**. A partícula surge como uma operação de criação, A^\dagger , sobre o vazio ou vácuo,

$$|\hat{\Psi}_D\rangle = A^\dagger|0\rangle. \quad (338)$$

O campo quântico da matéria tem a propriedade que se dois entes quânticos idênticos trocarem de posição entre si, o sinal do campo pode mudar ou não, sem que isso altere o comportamento do sistema. A densidade de probabilidade, $|\hat{\Psi}(x_1, x_2)|$, é invariante por essa troca de sinal.

$$|\hat{\Psi}_D(x_1, x_2)\rangle = \pm |\hat{\Psi}_D(x_2, x_1)\rangle \quad \text{ou} \quad |\hat{\Psi}_D(x_1)|\hat{\Psi}_D(x_2)\rangle = \pm |\hat{\Psi}_D(x_2)|\hat{\Psi}_D(x_1)\rangle \quad (339)$$

Para distinguir a carga da partícula e da antipartícula é necessário aplicar o campo eletromagnético. Na presença do campo é necessário modificar o quadrimomento na equação de Paul Dirac. Essa transformação é denominada acoplamento mínimo.

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \rightarrow \vec{p} - |q|\vec{A} = -i\hbar\left(\vec{\nabla} - i\frac{|q|}{\hbar}\vec{A}\right) \quad (340)$$

$$\partial_0 = \frac{1}{c}\partial_t \rightarrow \partial_0 + i\frac{|q|}{\hbar c}\phi \quad (341)$$

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - i\frac{|q|}{\hbar}\vec{A} \quad (342)$$

$$\partial^\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla}) \rightarrow \mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + i\frac{|q|}{\hbar}A^\mu \quad (343)$$

$$\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla}) \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i\frac{|q|}{\hbar}A_\mu \quad (344)$$

em que $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})$ e $A_\mu = (\phi/c, -\vec{A})$.

4. Normalização

Como a solução da equação de Dirac para partículas livres são ondas planas não se obtém um valor finito para a integração em todo o espaço. Assim a estratégia comumente utilizada para normalizar é definir a densidade.

$$\Psi_1^\dagger \Psi_1 \equiv 2\mathcal{E} = \mathcal{N}_1^* \mathcal{N}_1 \frac{2\mathcal{E}}{\mathcal{E} + mc^2} \implies \mathcal{N}_1 = \sqrt{\mathcal{E} + mc^2} \quad (345)$$

Faz-se o mesmo para os outros spinores.

5. Conjugação de carga

De acordo com a interpretação das soluções da equação de Paul Dirac, a antipartícula apresenta carga de sinal oposto à partícula. Como foram obtidas duas soluções para partículas e duas para antipartículas é necessário determinar quais são os pares,

$$(\Psi_D, \Psi_D^a). \quad (346)$$

Para isso obtém-se o complexo conjugado da equação de Paul Dirac na presença do campo eletromagnético e a multiplica pelo número complexo i e pela matriz γ^2 de Dirac para obter a equação de Dirac com a carga de sinal trocado.

$$i\hbar\gamma^\mu \left(\partial_\mu + i\frac{|q|}{\hbar}A_\mu \right) \Psi_D - mc\Psi_D = 0 \quad (347)$$

$$i\gamma^2 \times (-i)\gamma^{\mu*} \hbar \left(\partial_\mu - i\frac{|q|}{\hbar}A_\mu \right) \Psi_D^* - mc(i\gamma^2\Psi_D^*) = 0 \quad (348)$$

Usa-se que $\gamma^2\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu\gamma^2$.

$$-\hbar\gamma^\mu\gamma^2 \left(\partial_\mu - i\frac{|q|}{\hbar}A_\mu \right) \Psi_D^* - mc(i\gamma^2\Psi_D^*) = 0 \quad (349)$$

Compare-se com a Equação 347. Obtem-se a equação de Paul Dirac em que $|q| \rightarrow -|q|$.

$$i\hbar\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{|q|}{\hbar}A_\mu \right) \Psi_{D,C} - mc\Psi_{D,C} = 0 \quad (350)$$

em que $\Psi_{D,C} = i\gamma^2\Psi_D^*$

Diz-se que ocorreu a conjugação da carga e define-se o operador de conjugação de carga que transforma o spinor da partícula no spinor da antipartícula.

$$\Psi_{D,C} = \hat{C}\Psi = i\gamma^2\Psi_D^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_D^* \quad (351)$$

Examine-se o spinor da antipartícula referente a Ψ_1 .

$$\Psi_{1,C} = \hat{C}\Psi_1 \quad (352)$$

$$= \mathcal{N}_1^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x - ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (353)$$

$$= \mathcal{N}_1^* \begin{pmatrix} \frac{\hbar c(k_x - ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ -\frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (354)$$

$$= \Psi'_4 \quad (355)$$

Conclui-se que Ψ'_4 é o spinor da antipartícula com *spin* para cima.

$$\Psi_{2,C} = \hat{C}\Psi_2 \quad (356)$$

$$= \mathcal{N}_2^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\hbar c(k_x + ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ -\frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (357)$$

$$= -\mathcal{N}_2^* \begin{pmatrix} \frac{\hbar ck_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x + ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (358)$$

$$= \Psi'_3 \quad (359)$$

Conclui-se que Ψ'_3 é o spinor da antipartícula com *spin* para baixo.

6. Spin

Define-se o operador de *spin*,

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (360)$$

Calcule-se a ação do operador na direção z sobre o spinor que propaga nessa direção.

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (361)$$

Note-se que Ψ_1 e Ψ_2 são auto-estados do operador *spin* em que Ψ_1 tem o *spin* para cima e Ψ_2 tem o *spin* para baixo.

$$\hat{S}_z \Psi_1 = \frac{\hbar}{2} \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{+i(k_z z - \mathcal{E}t/\hbar)} = +\frac{\hbar}{2} \Psi_1 \quad (362)$$

$$\hat{S}_z \Psi_2 = \frac{\hbar}{2} \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \end{pmatrix} e^{+i(k_z z - \mathcal{E}t/\hbar)} = -\frac{\hbar}{2} \Psi_2 \quad (363)$$

Repete-se para a antipartícula.

$$\hat{S}_z^a \Psi'_3 = -\hat{S}_z \Psi'_3 = -\frac{\hbar}{2} \mathcal{N}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(k_z z - \mathcal{E}t/\hbar)} = -\frac{\hbar}{2} \Psi'_3 \quad (364)$$

$$\hat{S}_z^a \Psi'_4 = -\hat{S}_z \Psi'_4 = -\frac{\hbar}{2} \mathcal{N}_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\hbar c k_z}{(\mathcal{E} + mc^2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(k_z z - \mathcal{E}t/\hbar)} = +\frac{\hbar}{2} \Psi'_4 \quad (365)$$

Note-se que Ψ'_4 tem o *spin* para cima e Ψ'_3 tem o *spin* para baixo.

7. Helicidade

Define-se o operador de helicidade, \hat{h} , como a projeção do giro, i.e., *spin*, na direção do movimento.

$$\hat{h}(p) = \frac{1}{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \sigma \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \sigma \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \quad (366)$$

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{S}| |\vec{p}|} = \frac{2 \vec{S} \cdot \vec{p}}{\hbar |\vec{p}|} \rightarrow \begin{cases} h = +1 & \text{Dextrógiro} \\ h = -1 & \text{Livógiro} \end{cases} \quad (367)$$

em que $|\vec{S}| = \hbar/2$.

A helicidade não é invariante pela transformação de Lorentz.

8. Quiralidade

Define-se o operador de projeção quiral para determinar o grau de coincidência entre a partícula e sua imagem espelhada. A quiralidade é uma grandeza invariante pela transformação de Lorentz.

$$\hat{P}_E = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (368)$$

$$\hat{P}_D = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (369)$$

em que

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (370)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (371)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (372)$$

Para $m = 0$ e $\vec{k} = (0, 0, k_z)$ obtém-se $\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = p_z^2c^2$ ou $\hbar k_z = \mathcal{E}/c$.

$$\Psi_1 = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi_2 = \mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (373)$$

Note-se que Ψ_1 é dextrógiro e Ψ_2 é livógiro.

$$\begin{cases} \Psi_{1E} = \hat{P}_E \Psi_1 = 0 \\ \Psi_{1D} = \hat{P}_D \Psi_1 = \Psi_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi_{2E} = \hat{P}_E \Psi_2 = \Psi_2 \\ \Psi_{2D} = \hat{P}_D \Psi_2 = 0 \end{cases} \quad (374)$$

$$\Psi_3 = \mathcal{N}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)}, \quad \Psi_4 = \mathcal{N}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \mathcal{E}t/\hbar)} \quad (375)$$

Note-se que Ψ_3 é livógiro e Ψ_4 é dextrógiro. Como $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ os projetores estão trocados.

$$\begin{cases} \Psi'_{3E} = \hat{P}_D \Psi_3 = \Psi_3 \\ \Psi'_{3D} = \hat{P}_E \Psi_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi'_{4E} = \hat{P}_D \Psi_4 = 0 \\ \Psi'_{4D} = \hat{P}_E \Psi_4 = \Psi_4 \end{cases} \quad (376)$$

Para $v \approx c$ os autoestados da helicidade são os mesmos que os autoestados da quiralidade.

9. Densidade do lagrangiano

Como apresentado na Secção III F, para descrever a dinâmica do ente quântico é mais conveniente utilizar o formalismo do lagrangiano. No entanto, para ter uma descrição em que espaço e tempo são tratados igualmente passa-se do lagrangiano para a densidade do lagrangiano. De maneira que a ação,

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} dV = \int \mathcal{L} \det\{J\} d^4x \quad (377)$$

em que \mathcal{L} é a densidade de lagrangiano.

Para obter a equação de Dirac ao minimizar a ação, utiliza-se a densidade de lagrangiano,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\Psi}_D (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \Psi_D \quad (378)$$

em que $\bar{\Psi}_D = \Psi_D^\dagger \gamma^0$.

Para obter a dinâmica do campo quântico associado ao elétron combinado com campo quântico associado ao fóton, avalia-se a ação,

$$S = \int \mathcal{L}_D d^4x = \int \left[\bar{\Psi}_D (i\hbar c \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - mc^2) \Psi_D - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] d^4x \quad (379)$$

em que $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ e $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i \frac{e}{\hbar} A_\mu$.

Ao minimizar a ação obtêm-se as equações que descrevem a dinâmica do sistema. Note-se que

- Equação dinâmica da matéria.

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \bar{\Psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = 0 \quad (380)$$

- Equação dinâmica da interação.

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \quad (381)$$

A interação está contida na fase da função de onda de maneira que de acordo com Paul A. M. Dirac, a incerteza na fase por um múltiplo de 2π pode ser traduzida no monopolo magnético o que pode explicar a quantização da carga elétrica.

$$q_e q_m = 2\pi \hbar \epsilon_0 c^2 \implies q_m = 3,3 \times 10^{-9} \quad (382)$$

Outro aspecto é a energia do vácuo, $|0\rangle$, que se manifesta experimentalmente através do efeito descoberto por Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000) em que materiais sofrem atração como resultado da flutuação da energia do vácuo entre eles.

- Paul A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. Lond. A 133, 60-72 (1931).
- Ian J. R. Aitchison, Anthony J. G. Hey, *Gauge theories in particle physics - a practical introduction*. Volume 1 (3rd ed.), IOP Publishing, Bristol (2003).
- Dai-Yu Xu, Towe Wang, Xun Xue, *Quantum Tunneling Time: Relativistic Extensions*, Found. Phys., **43**, 1257-1274 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10701-013-9744-2>.
- Oskar Klein, *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac*, Zeitschrift für Physik, **53**, 157-165 (1928).
- A. Calogheracos, N. Dombey, *History and Physics of the Klein paradox*, CERN (1999). DOI:10.1080/001075199181387

B. Modelo padrão

A experiência de espalhamento de partículas α realizada pela equipe de Ernest Rutherford (1871-1937) demonstrou a existência do núcleo. Foi utilizado um feixe incidente de partículas α , colimado de maneira que a área da secção transversal é A_F . Uma folha metálica fina de espessura L_E e com n_E átomos espalhadores por unidade de volume é posicionada para ser atravessada pelo feixe.

Ele obteve matematicamente a expressão da secção de choque que explica os resultados experimentais observados por seus estudantes Johannes Wilhelm Geiger (1882-1945) e Ernest Marsden (1889-1970) ao assumir que o núcleo era uma concentração pontual de carga positiva. O número de eventos observados, ΔN_o , no ângulo sólido, $\Delta\Omega$, determinado pelo equipamento de detecção do observador é uma função da secção de choque,

$$\Delta N_o = N_\alpha \frac{\Delta\sigma_T}{A_F} = N_\alpha \frac{N_E}{A_F} \Delta\sigma_1 = N_\alpha n_E L_E \frac{d\sigma_1}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (383)$$

$$= N_\alpha n_E L_E \left[\left(\frac{Z_N Z_\alpha e^2}{16\pi\epsilon_o \mathcal{E}_\alpha} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\phi/4)} \right] \Delta\Omega \quad (384)$$

em que N_α é a quantidade de partículas incidentes, A_F é a área da secção transversal do feixe incidente, $\Delta\sigma_T$ é a secção de choque total que contribui para o espalhamento, N_E é a quantidade de espalhadores e σ_1 é a secção de choque de um núcleo no material espalhador.

A partir dessa experiência átomos e depois partículas subatômicas passaram a ser examinados com energias cada vez maiores com três técnicas básicas:

- Espalhamento elástico.
- Espectroscopia ou espalhamento inelástico.
- Fragmentação.

Como a massa do átomo não poderia ser explicada apenas com prótons, Ernest Rutherford especulou a existência dos neutrons que teriam o papel de estabilizar o núcleo. Assim, chegou-se à conclusão que o núcleo é composto de prótons, proposto por Ernest Rutherford em 1920, e neutrons, proposto por Ernest Rutherford e descoberto por James Chadwick (1891-1974) em 1932. Com isso, surge a questão da estabilidade do núcleo, cargas positivas deveriam repelir umas as outras. Para garantir a estabilidade foi proposto a força nuclear que seria de curto alcance. Matematicamente, para ser de curto alcance, a partícula portadora da interação teria que possuir massa. Essa descrição foi proposta por Hideki Yukawa (1907-1981) que previu a existência do méson-pi cuja descoberta teve a participação de César Lattes (1924-2005).

A descoberta por Paul Dirac da equação quântica relativística e a interpretação da solução dessa equação como o campo de matéria resultou no surgimento da teoria do campo quântico ou teoria quântica do campo. Assim chega-se a unificação entre a teoria quântica e a eletrodinâmica que ficou conhecida como **eletrodinâmica quântica**, que é a teoria mais exata conhecida do ponto de vista de fornecer valores experimentalmente comprovados. Inspirado no sucesso da eletrodinâmica quântica buscou-se um arcabouço teórico que possa descrever todas as unidades elementares de matéria e suas interações. Esse esforço investigativo resultou na elaboração de outra grande unificação: a **teoria eletrofraca** que descreve o decaimento radiativo. Também serve de base para a **cromodinâmica quântica** e finalmente na elaboração do **modelo padrão**. Tudo isso embutido na fase do campo quântico.

Atualmente, sabe-se que há dois tipos de unidades de matéria: quarks e léptons. Os componentes do núcleo são formados por quarks e os elétrons ligados à ele, são léptons. São seis quarks: *bottom* (b), *charm* (c), *down* (d), *strange* (s), *top* (t), *up* (u) e seis léptons: elétron (e^-), muon (μ^-), tau (τ^-) e três neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ). Além desses há as partículas que transportam a interação ou força. São quatro forças ou interações fundamentais conhecidas:

- Força gravitacional.
- Força eletromagnética.
- Força fraca.
- Força forte.

Note-se que as unidades elementares de matéria apresentam *spin* fracionário, $\hbar/2$, e obedecem a estatística de Fermi-Dirac. Por isso são denominadas de fermiônicas. Os léptons que é a generalização do elétron interagem através da força fraca e se tiverem carga também interagem através da força eletromagnética. Os quarks podem interagir através da força forte, força fraca e força eletromagnética. Todos com massa interagem através da força gravitacional.

A interação que no eletromagnetismo é representada pela transformação unitária, $U(1)$, é generalizada. O argumento da exponencial deixa de ser um número complexo e passa a ser combinação de matrizes, denominadas de matrizes geradoras λ_k . Essas matrizes formam **grupos matemáticos de Lie**.

$$U(\theta) = 1 + i \sum_{k=1}^D \theta_k \lambda_k \approx e^{i \sum_{k=1}^D \theta_k \lambda_k} \quad (385)$$

em que θ_k é infinitesimal, λ_k são as matrizes geradoras do grupo de transformações e D é a dimensão do grupo de transformações.

A interação fraca faz uso do mecanismo da escolha local da fase, mas utiliza matrizes para representar a base da transformação da fase. Para essa interação $\lambda_k \in SU(2)$ em que SU significa unitário especial, i.e., $SU(2)$ é o conjunto de matrizes 2×2 unitárias com determinante igual a um. Uma matriz de números complexos é dita unitária se o conjugado da transposta é igual a inversa.

Na unificação da força eletromagnética com a força fraca, obtém-se a **teoria da interação eletrofraca** em que a fase é uma combinação de matrizes do grupo de simetria $SU(2)$ com $U(1)$ para obter o grupo de simetria $SU(2) \otimes U(1)$. A teoria eletrofraca foi desenvolvida por Sheldon Lee Glashow (1932-), Mohammad Abdus Salam (1926-1996) e Steven Weinberg (1933-2021).

Na **Cromodinâmica quântica** que descreve os quarks, utiliza-se $SU(3)$ que é formado por matrizes 3×3 com determinante igual a um. A cromodinâmica quântica é o desenvolvimento de muitos, a exemplo de Harald Fritzsch (1943-2022). Os grupos matemáticos $SU(2)$ e $SU(3)$ não são comutativos e assim são denominados de não-abelianos. Assim, generaliza-se as equações 286 e 287.

$$\Psi'(r) = U(\theta)\Psi(r) \quad (386)$$

$$D_\mu \Psi'(r) = U(\theta)D_\mu \Psi(r) \quad (387)$$

em que $U(\theta) = e^{i \sum_k \theta_k \lambda_k}$ e λ_k são os geradores do grupo $SU(2)$ ou $SU(3)$.

A quantidade de geradores independentes em $SU(N)$ é $N^2 - 1$. A quantidade de geradores indica a quantidade de partículas de interação. O grau de liberdade interno de $U(1)$ corresponde à força eletromagnética, os $2^2 - 1 = 3$ graus de liberdade internos de $SU(2)$ correspondem à força fraca e os $3^2 - 1 = 8$ graus de liberdade internos de $SU(3)$ correspondem à força forte. Para os graus de liberdade de $SU(2)$ que correspondem a 3 geradores, pode-se escolher as matrizes de Pauli, σ_1 , σ_2 e σ_3 . Na interação eletrofraca, $SU(2) \otimes U(1)$, tem-se quatro partículas de interação:

- Bósons W_1, W_2, W_3 .
- Bóson Z .

A quebra espontânea de simetria na interação eletrofraca faz com que os bósons W e Z ganhem massa. Este é o mecanismo de Higgs (bóson de Higgs, H). O mecanismo de Higgs também é utilizado para dar massa para léptons e quarks. Apenas os neutrinos não ganham massa, o que contradiz o resultado experimental. Como já havia sido proposto por Hideki Yukawa, é necessário que as partículas de interação na teoria da força fraca e da força forte tenham massa para que a força seja de curto-alcance. Após a quebra de simetria na interação eletrofraca obtem-se:

- Bósons W^+ e W^- .
- Bóson Z^0 .
- Fóton.

Assim a simetria da interação eletrofraca é quebrada espontaneamente. Como o fóton não ganha massa a força eletromagnética é de longo alcance.

A cromodinâmica quântica descreve a interação forte com a aplicação do grupo de simetria $SU(3)$. Para $SU(3)$ são 8 geradores que podem ser escolhidos como as matrizes de Murray Gell-Mann (1929-2019).

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (388)$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (389)$$

A partícula de interação é denominada de gluon. Com o $SU(3)$ tem-se 8 gluons. No **Modelo padrão** que unifica a teoria eletrofraca e a cromodinâmica quântica, utiliza-se $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ ou mais precisamente,

$$\boxed{SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y}. \quad (390)$$

Uma simetria é dita global se não depende do espaço-tempo. Simetria local ou de calibre é dependente do espaço tempo. As leis da Natureza devem ser invariantes por operações de simetria no espaço-tempo (transformações de Poincaré). Tipos de simetria:

- discreta: reversão do tempo, T , conjugação de carga, C , e paridade, P (inversão espacial).
- contínua: translação, rotação.
 - espaço-tempo: translação, rotação.
 - interna: isospin.

De acordo com o teorema de Amalie Emmy Noether (1882-1935) cada simetria está associada a uma quantidade sendo conservada, seja energia, momento linear, momento angular, carga, quantidade de partículas.

1. Quem encomendou essa?

Com a descoberta experimental de tantas partículas subatômicas Isidor Isaac Rabi (1898-1988) teria dito:

Who ordered that? (*Quem encomendou essa?*)

Assim buscou-se uma maneira de organizar a selva de partículas observadas experimentalmente. Um modelo de classificação dos hadrons (bárions e mésons) foi proposto por Murray Gell-Mann (1929-2019) que propôs o nome “quark” e de maneira independente por George Zweig (1937-). O objetivo era determinar quais hadrons eram de fato partículas elementares, i.e., se existem partículas mais elementares que formariam a selva de partículas observadas experimentalmente. Obtem-se que seis quarks,

1. *bottom* (b),
2. *charm* (c),
3. *down* (d),
4. *strange* (s),
5. *top* (t),
6. *up* (u),

são suficientes para descrever os bárions conhecidos, como ilustrado na Figura 4. Os diferentes tipos de quarks são denominados de sabores. Os bárions tais como o próton e o neutron são formados por três quarks e se encaixam no modelo com octetos ($S = 1/2$) e decupletos ($S = 3/2$). Os mésons ($S = 0$ e $S = 1$) são formados por dois quarks e formam noneto. Para cada quark tem-se o anti-quark. A “carga” do quark que produz a força forte tem três polaridades ou cores (*red* : r , *green* : g , *blue* : b) e outras três polaridades ou anti-cores (\bar{r} , \bar{g} , \bar{b}).

- Próton (p): uud .
- Neutron (n): udd .
- Delta mais mais (Δ^{++}): uuu .
- Delta mais (Δ^+): uud .
- Delta zero (Δ^0): udd .
- Delta menos (Δ^-): ddd .
- Lambda zero (Λ^0): uds .
- Lambda charmoso (Λ^{c+}): udc .
- Lambda para baixo (Λ^{b0}): udb .
- Omega menos (Ω^-): sss .
- Xi menos (Ξ^-): sds .
- Xi zero (Ξ^0): sus .
- Sigma mais (Σ^+): uus .
- Sigma zero (Σ^0): uds .
- Méson pi ou pion: $d\bar{u}$ (π^-), $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ (π^0), $u\bar{d}$ (π^+).
- Meson kaon: $\bar{u}s$ (K^-), $d\bar{s}$ (K^0), $u\bar{s}$ (K^+).

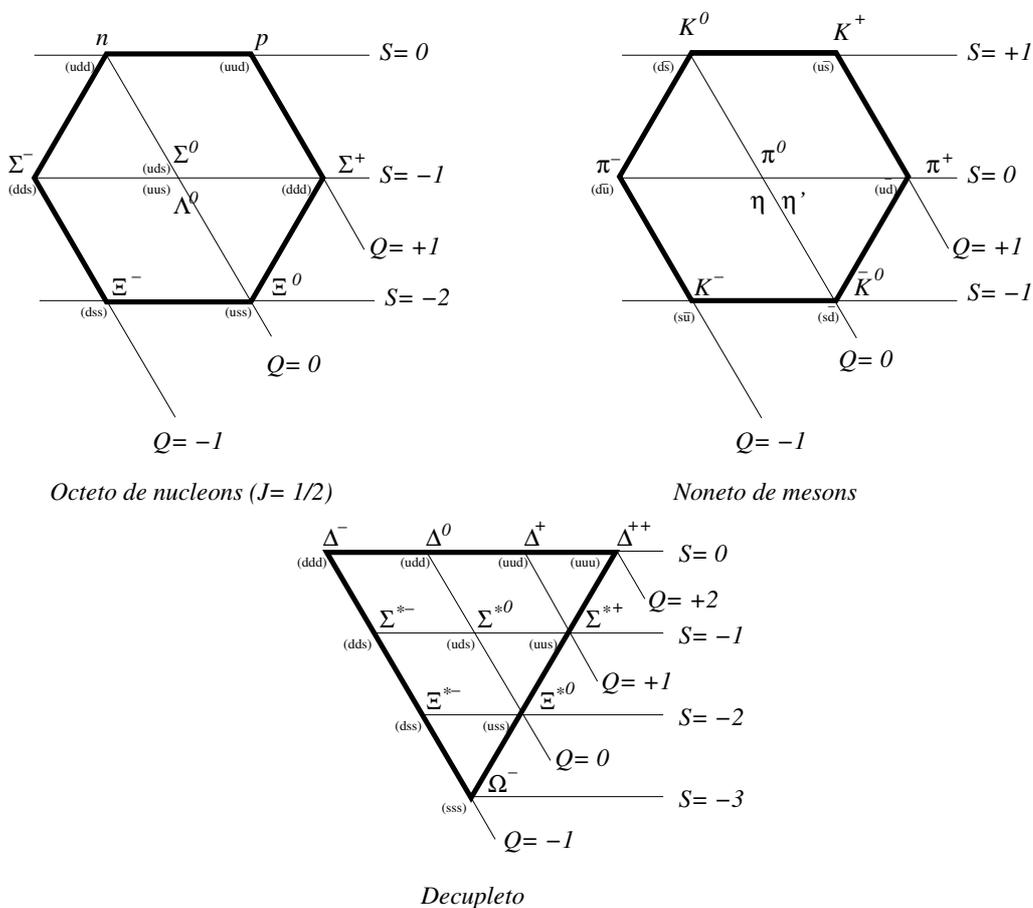


FIG. 4. Modelo de quark para os bárions em que Q é múltiplo da carga do elétron e S é a “estranheza”.

O conceito de corda foi inicialmente utilizado para descrever a força de interação entre quarks. Mas esse modelo foi posteriormente suplantado pela **Cromodinâmica quântica** que tem a mesma estrutura matemática do modelo da teoria eletrofraca. Surge assim o modelo padrão.

Com o modelo padrão consegue-se descrever três léptons: elétron, e^- , muon, μ^- e tau, τ^- , e os neutrinos correspondentes: ν_e, ν_μ e ν_τ , assim como seis quarks com os “sabores”: u, d, s, c, b e t . O sabor indica os tipos de fonte da força forte enquanto a cor indica o tipo de carga da força forte, assim como a carga elétrica é a origem da força eletromagnética. Enquanto cada quark apresenta o grau de liberdade de cor, as partículas formadas por quarks não apresentam esse grau de liberdade. Tem-se combinações de vermelho, verde e azul nos bárions ou combinações de cor e anticor nos mésons. A carga elétrica do quark corresponde a $1/3$ da carga do elétron. A riqueza de combinações é muito maior que a apresentada.

2. Etapas do modelo

[I] Selecionar o grupo matemático que determina os campos de intermediação da interação. A quantidade de campos é igual à dimensão da representação adjunta desse grupo. Para a interação fraca entre léptons são necessários três campos que correspon-

dem a três bósons vetoriais. O grupo mínimo unitário cuja representação adjunta tem dimensão três é $SU(2)$. Para a interação eletromagnética entre léptons basta apenas um campo. O grupo mínimo unitário cuja representação adjunta tem uma dimensão é $U(1)$.

$$SU(2) \otimes U(1) \quad (391)$$

São $2^2 - 1 = 3$ matrizes $SU(2)$ conhecidas como matrizes de Pauli,

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (392)$$

São $3^2 - 1 = 8$ matrizes $SU(3)$ conhecidas como matrizes de Gell-Mann.

[II] Selecionar os férmions primários ou fundamentais que definem o modelo. Para a interação eletrofraca tem-se:

$$e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau \quad (393)$$

[III] Selecionar a representação mínima do grupo na qual os férmions são colocados. Por exemplo os dubletos $SU(2)$.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (394)$$

Cada dubleto pode ser separado em partícula livógira, L , ou dextra, D .

$$L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad (395)$$

$$D = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad (396)$$

em que $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

[IV] Introduzir os termos de interação.

[V] Especificar a composição final do modelo.

[VI] Escrever o lagrangiano globalmente invariante. Como o lagrangiano é extremamente extenso divide-se em setores.

$$\mathcal{L}_{EF} = \mathcal{L}_{Ci} + \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_{Ca} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{HV} + \mathcal{L}_{WV} + \mathcal{L}_{WV} + \mathcal{L}_{WV} + \mathcal{L}_Y \quad (397)$$

[VII] Escrever o lagrangiano correspondente que seja localmente invariante.

[VIII] Utilizar o mecanismo de quebra espontânea de simetria para obter a expressão final do lagrangiano.

O modelo padrão não é invariante com relação à paridade (P) ou reversão do tempo (T), mas é invariante com relação a operação transformada CPT em que C é a operação de conjugação da carga. Nesse modelo toda partícula é um quantum de algum campo de matéria. Pode-se criar ou destruir partículas.

Apesar do grande sucesso, é importante salientar que esse modelo não inclui a força gravitacional. O modelo padrão tem deficiências:

- Não explica a quantização da carga,
- Não explica os valores para as massas das partículas,
- Não explica porque o neutrino tem massa,
- Não explica a matéria escura,
- Não explica porque tem tanta matéria e pouca anti-matéria,
- Não inclui a interação gravitacional.

Seguindo a estrutura do modelo tenta-se explorar grupos maiores como $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 , mas tem-se dificuldade em obter evidência experimental. Sabe-se que os três parâmetros de acoplamento associados às três forças convergem em torno de 10^{15} GeV que não é alcançável com os equipamentos disponíveis.

- Ian J. R. Aitchison, Anthony J. G. Hey, *Gauge theory in particle physics*, CRC Press, 3rd Rev ed. (2002).
- Ian D. Lawrie, *A unified grand tour of theoretical physics*, 2ª Ed., Institute of Physics Publishing, Bristol (2002).
- Akash Jain, *Notes on symmetries in particle physics*, arXiv:2109.12087v1 [hep-th] 24 Sep 2021.

C. Campo quântico via integral de caminho

O passo seguinte é utilizar a teoria para estimar resultados experimentais ou fazer previsões. Para isso pode-se utilizar a técnica da integral de caminho. De acordo com a notação elaborada por P.A.M. Dirac, $|0\rangle$ representa o estado quântico do vácuo e $\langle 0|$ é o complexo conjugado.

Para ilustrar a técnica da integral de caminho considere-se a equação de Erwin Schrödinger em que a evolução temporal do sistema quântico,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \implies \Psi = \Psi(0)e^{-i\frac{H}{\hbar}t}. \quad (398)$$

Na teoria do campo quântico a partícula surge do vácuo, propaga pelo universo e depois desaparece no vácuo. Esse processo é descrito de maneira natural com a notação de Paul Dirac.

$$\langle 0|e^{-i\frac{1}{\hbar}H(t_M-t_N)}|0\rangle \quad (399)$$

em que H está associado à energia da partícula e $t_M - t_N$ é o tempo de vida da partícula.

De acordo com o princípio da incerteza,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\hbar}{\Delta t}. \quad (400)$$

Para flutuação bem pequena no tempo ocorre grande flutuação de energia. Essa grande flutuação pode fazer surgir partículas, $m = \mathcal{E}/c^2$.

Para obter a representação da mecânica quântica pela integral do caminho considere-se que a partícula evolui do estado A para o estado B no intervalo de tempo T . Há uma infinidade de possíveis rotas que podem ser utilizadas para ir da posição q_A para a posição q_B . A evolução temporal com base na mecânica quântica de Erwin Schrödinger na notação de Paul A. M. Dirac.

$$\langle q_B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | q_A \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle q_N | \prod_{k=1}^{N-1} e^{-i\frac{1}{\hbar}(\mathcal{E}_c(\dot{q}_k) + \mathcal{E}_p(q_k)) \frac{T}{N-1}} | q_0 \rangle \quad (401)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \int \langle q_{k+1} | e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_c(\dot{q})\delta t} (|q_k\rangle\langle q_k|) | q_{k-1} \rangle e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (402)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \int e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_c(\dot{q})\delta t} \langle q_{k+1} | p \rangle \langle p | q_k \rangle \langle q_k | \frac{dp}{2\pi} | q_{k-1} \rangle e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (403)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \int e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_c(\dot{q})\delta t} e^{ip(q_{k+1}-q_k)/\hbar} \frac{dp}{2\pi} e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (404)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{N-1} \int e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}\delta t} e^{ip(q_{k+1}-q_k)/\hbar} \frac{dp}{2\pi} e^{-i\frac{1}{\hbar}\mathcal{E}_p(q)\delta t} dq_k \quad (405)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-i2\pi m\hbar}{\delta t} \right)^{N/2} \prod_{k=1}^{N-1} \int e^{i\frac{1}{\hbar}(\mathcal{E}_c(\dot{q}) - \mathcal{E}_p(q))\delta t} dq_k \quad (406)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-i2\pi m\hbar}{\delta t} \right)^{N/2} \int e^{i\frac{1}{\hbar} \sum_{k=1}^{N-1} L(q, \dot{q})\delta t} dq_k \quad (407)$$

$$= \int e^{i\frac{1}{\hbar} \int_0^T L(q, \dot{q}) dt} Dq \quad (408)$$

$$= \int e^{i\frac{1}{\hbar} S(q)} Dq \quad (409)$$

em que $|q_A\rangle = |q_0\rangle$, $\langle q_B| = \langle q_N|$, os estados formam um conjunto completo $\int |q_k\rangle\langle q_k| dq_k = 1$, $\int |p\rangle\langle p| dp = 2\pi$, $\langle p|q_k\rangle = e^{-ipq_k/\hbar}$ e $S(q)$ é a ação que depende do caminho utilizado.

Passa-se de posição para estados. Assim, em termos dos estados $|A\rangle$ e $|B\rangle$.

$$\langle B | q_B \rangle \langle q_B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | q_A \rangle \langle q_A | A \rangle \quad (410)$$

Calcula-se a integral.

$$\int \int \langle B | q_B \rangle \langle q_B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | q_A \rangle \langle q_A | A \rangle dq_A dq_B \quad (411)$$

$$\boxed{\langle B | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | A \rangle} \quad (412)$$

O estado inicial e o estado final podem ser o vácuo ou estado fundamental.

$$Z \equiv \langle 0 | e^{-i\frac{1}{\hbar}HT} | 0 \rangle = \int e^{i\frac{1}{\hbar} S(q)} Dq \quad (413)$$

Para construir a mecânica quântica relativística de Paul Dirac escreve-se a ação em termos da densidade do lagrangiano de maneira que todas as dimensões recebem tratamento igualitário.

$$\boxed{Z \equiv \int e^{i\frac{1}{\hbar} \int \mathcal{L} dx^\mu} Dq} \quad (414)$$

A junção entre a teoria restrita da relatividade e teoria quântica faz surgir as anti-partículas e junto com elas o conceito de *spin* e as estatísticas associadas.

1. Força via teoria quântica de campo

Considere-se a partícula descrita pela seguinte densidade lagrangiano em unidades naturais, $\hbar = 1, c = 1$, veja Apêndice A.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] + J\phi \quad (415)$$

em que o termo $J\phi$ indica que o sistema foi perturbado.

Para obter a evolução do sistema é necessário resolver a integral,

$$Z \equiv \int e^{i \int \mathcal{L} dx^\mu} Dq = \int e^{i \int \frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] + J\phi d^4x} D\phi \quad (416)$$

Note-se que ao fazer a integração por partes para calcular Z ,

$$\int (\partial\phi)^2 d^4x = \underbrace{[\phi\partial\phi]_{-\infty}^{\infty}}^0 - \int \phi\partial^2\phi d^4x \quad (417)$$

$$Z = \int e^{i \int \frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] + J\phi d^4x} D\phi = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2)\phi + J\phi] d^4x} D\phi. \quad (418)$$

Aplica-se o princípio de Hamilton,

$$\partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{1}{2}[2\partial(\partial\phi) - (-2m^2\phi)] - J = 0. \quad (419)$$

Obtem-se a equação de Klein-Gordon na presença da perturbação,

$$[\partial^2 + m^2]\phi = J. \quad (420)$$

Aplica-se a técnica da função de Green ou propagador do sistema em que $J = 0$. Essa é uma técnica muito poderosa para obter soluções para equações diferenciais.

$$[\partial^2 + m^2]G(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (421)$$

Pode-se imaginar a função de Green como a inversa da equação diferencial,

$$G(x - y) = [\partial^2 + m^2]^{-1} \quad (422)$$

$$Z(J) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int [-\frac{1}{2}\phi(\partial^2 + m^2)\phi + J\phi] d^4x} D\phi = Z(0)e^{\frac{i}{2\hbar} \int \int J(x)G(x-y)J(y) d^4x d^4y} \quad (423)$$

em que $Z(0)$ é um fator de normalização.

Considere-se J formado por duas fontes pontuais,

$$J = J_1 + J_2 = \delta(\vec{x} - \vec{x}_1) + \delta(\vec{x} - \vec{x}_2) \quad (424)$$

Interessa avaliar os termos em que a fonte 1 e a fonte 2 interagem. No domínio de Fourier,

$$\frac{1}{2} \int \int J(x)G(x-y)J(y)d^4x d^4y \longrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^4} \left[\int J(k)^*G(k)J(k)d^4k \right] \quad (425)$$

Para a assinatura da métrica (+ - - -) tem-se o seguinte par de Fourier na métrica de Minkowski:

$$J(k) = \int J(x)e^{ik_\mu x^\mu} dx^4 \quad (426)$$

$$J(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int J(k)e^{-ik_\mu x^\mu} dk^4 \quad (427)$$

em que $k_\mu x^\mu = k_0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$.

$$G(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{k_0 k_0 - \vec{k} \cdot \vec{k} - m^2 + i\epsilon} \quad (428)$$

em que ϵ é introduzido para garantir a convergência, i.e., deve-se obter uma exponencial negativa, $e^{-\epsilon t}$, para atenuar as oscilações.

Ao substituir a expressão para a fonte na Equação 424, apenas dois termos representam a interação. Os outros dois termos representam a contribuição para a auto-energia.

$$[J_1(k)^*G(k)J_2(k) + J_2(k)^*G(k)J_1(k)] = 2[J_1(k)^*G(k)J_2(k)] \quad (429)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \left[\int J_1(k)^*G(k)J_2(k)d^4k \right] = \frac{1}{(2\pi)^4} \left[\int \frac{J_1(k)^*J_2(k)}{k_0 k_0 - \vec{k} \cdot \vec{k} - m^2 + i\epsilon} d^4k \right] \quad (430)$$

Usa-se que,

$$J_1(k) = \int e^{ik_0 x^0} dx^0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_1} \quad (431)$$

$$J_2(k) = \int e^{ik_0 y^0} dy^0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_2} \quad (432)$$

$$\int J_1(k)^*G(k)J_2(k)d^4k = \int \frac{J_1(k)^*J_2(k)}{k_0 k_0 - \vec{k} \cdot \vec{k} - m^2 + i\epsilon} d^4k \quad (433)$$

$$= \int dx^0 dy^0 e^{-ik_0(x^0 - y^0)} \left[\int \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}}{k_0 k_0 - \vec{k} \cdot \vec{k} - m^2 + i\epsilon} d^4k \right] \quad (434)$$

$$= 2\pi \int dx^0 \int dk_0 \delta(k_0) e^{-ik_0 x^0} \left[\int \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}}{k_0 k_0 - \vec{k} \cdot \vec{k} - m^2 + i\epsilon} d^3k \right] \quad (435)$$

$$= 2\pi \left(\int dx^0 \right) \left[\int \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}}{-\vec{k} \cdot \vec{k} - m^2 + i\epsilon} d^3k \right] \quad (436)$$

$$= 2\pi \text{Tempo} \times (2\pi)^3 \text{Energia} \quad (437)$$

Obtem-se a energia que resulta na força nuclear de curto alcance proposta por Hideki Yukawa,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}}{k^2 + m^2} d^3k = -\frac{1}{2\pi r} e^{-mr} \quad (438)$$

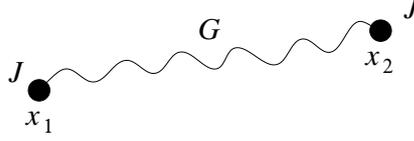


FIG. 5. Interação via o campo.

Enquanto J representa as fontes de interação, a função de Green ou propagador, G , representa a interação, como ilustrado na Figura 5.

Para o caso eletromagnético,

$$G_{\nu\lambda}(k) = \frac{-g_{\nu\lambda} + k_\nu k_\lambda / m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (439)$$

em que $\hbar = 1$ e $c = 1$.

Usa-se que $\partial_\mu J^\mu(x) = 0$ que no domínio de Fourier obtém-se a expressão $k_\mu J^\mu(k) = 0$.

$$\mathcal{E} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{k^2 + m^2} d^3k = \frac{1}{2\pi r} \quad (440)$$

Cargas de mesmo sinal se repelem.

$$F = -\frac{d\mathcal{E}}{dr} = \frac{1}{2\pi r^2} \quad (441)$$

2. Propagador e quantização

O campo no exemplo anterior é clássico. Ainda falta ser quantizado. Examine-se o comportamento do propagador da perturbação no campo em termos do modo de vibração, i.e., no espaço do quadri vetor de onda.

$$G(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik_\mu x^\mu} dk^4 \quad (442)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{k_0 k_0 - \omega_k^2 + i\epsilon} e^{-i(k_0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} dk^0 d\vec{k} \quad (443)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int \left[\frac{e^{-ik_0 x^0}}{(k_0 - \omega_k + i\epsilon)(k_0 + \omega_k - i\epsilon)} \right] \frac{dk_0}{2\pi} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (444)$$

em que $\hbar = 1$, $c = 1$ e $\omega_k = +\sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k} - m^2} = \omega_{-k}$.

Para resolver essa integral faz-se a extensão para o plano complexo e aplica-se o teorema do resíduo de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) para realizar a integração em k_0 . Seguindo a recomendação de Ernst Stückelberg e Richard Feynmann, busca-se uma solução que propaga no sentido positivo do tempo, $t = x^0 > 0$ e outra no sentido negativo, $t = x^0 < 0$. As soluções podem ser combinadas com a utilização da função degrau unitário de Oliver Heaviside (1850-1925),

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x^0 > 0 \\ 1/2 & \text{para } x^0 = 0 \\ 0 & \text{para } x^0 < 0 \end{cases} . \quad (445)$$

Os contornos são mostrados na Figura 6. Note-se que ao introduzir o parâmetro infinitesimal “ ϵ ” evita-se que o caminho de integração passe pelo polo. Na condição $x^0 > 0$ e para o sentido positivo de k^0 segue-se no sentido horário para o percurso, para envolver o polo com energia positiva, representado pelo semicírculo para baixo mostrado à esquerda da Figura 6. De acordo com o teorema do resíduo de Cauchy, para o sentido horário, o resultado da integral é $-2\pi i f(z_0)$. Na condição $x^0 < 0$ e para o sentido positivo de k^0 segue-se no sentido anti-horário para o percurso, para envolver ao polo com energia negativa, representado pelo semicírculo para cima mostrado à direita da Figura 6. De acordo com o teorema do resíduo de Cauchy o resultado da integral é $2\pi i f(z_0)$. Para as soluções que voltam no tempo escolhe-se aquelas de energia negativa, $-\omega_{-k} = -\omega_k$, e momento negativo, $-\vec{k}$.

$$G(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \oint \left[\frac{e^{-izx^0}}{(z - \omega_k + i\epsilon)(z + \omega_k - i\epsilon)} \right] \frac{dz}{2\pi} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \quad (446)$$

$$= \left[i \int \frac{e^{-i\omega_k t}}{2\omega_k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \right] \theta(x^0) + \left[i \int \frac{e^{i\omega_k t}}{-2\omega_k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \right] \theta(-x^0) \quad (447)$$

$$= \left[i \int e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \right] \theta(x^0) + \left[i \int e^{i\omega_k t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \right] \theta(-x^0) \quad (448)$$

$$= i \int \left[e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \theta(x^0) + e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \theta(-x^0) \right] \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \quad (449)$$

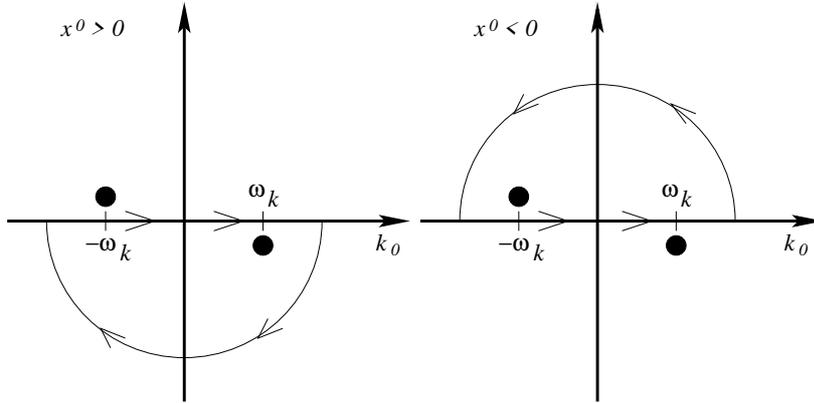


FIG. 6. Integração no plano complexo. O percurso é horário para $t > 0$ e anti-horário para $t < 0$.

Ao quantizar define-se os comutadores ou anticomutadores para os campos. Então surgem operadores de criação e de aniquilação.

3. Densidade de corrente

Como visto na Seção IV A 3 pode-se escrever a solução da equação de Dirac com apenas energias positivas.

$$\langle 0 | j^k | 0 \rangle = \langle 0 | \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^k \Psi | 0 \rangle \quad (450)$$

$$= \langle 0 | \begin{pmatrix} \phi^\dagger & \chi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} | 0 \rangle \quad (451)$$

$$= \langle 0 | \phi^\dagger \sigma^k \chi | 0 \rangle + \langle 0 | \chi^\dagger \sigma^k \phi | 0 \rangle \quad (452)$$

A partícula de carga negativa e energia negativa é equivalente à partícula de carga positiva e energia positiva com o momento no sentido contrário. Combina-se o spinor da partícula e da antipartícula com *spin* para cima e o mesmo para *spin* para baixo e soma-se para todos os valores de k . Essa soma de modos é a transformada de Fourier.

$$\Psi = \int \left[\Psi_1(\vec{k}, t) + \Psi_4'(\vec{k}, t) \right] + \left[\Psi_2(\vec{k}, t) + \Psi_3'(\vec{k}, t) \right] \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\mathcal{E}/\hbar}} \quad (453)$$

$$= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\mathcal{E}/\hbar}} \left[\mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x+ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} + \mathcal{N}_4 \begin{pmatrix} \frac{\hbar c(k_x-ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ -\frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} \right] \\ + \left[\mathcal{N}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\hbar c(k_x-ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ -\frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \end{pmatrix} e^{+i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} + \mathcal{N}_3 \begin{pmatrix} \frac{\hbar c k_z}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ \frac{\hbar c(k_x+ik_y)}{(\mathcal{E}+mc^2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathcal{E}t/\hbar)} \right] \quad (454)$$

em que o coeficiente da integral é uma escolha para normalizar a transformada de Fourier.

Ao interpretar o spinor como um campo sobre o qual são criadas ou destruídas as partículas e antipartículas, escreve-se o mesmo em termos dos modos normais e operadores de criação e aniquilação,

$$|\Psi\rangle = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\mathcal{E}_k/\hbar}} \left[b_{k,s} \begin{pmatrix} \phi(k) \\ \chi(k) \end{pmatrix} e^{-ikx} + c_{k,s}^\dagger \begin{pmatrix} \phi'(k) \\ \chi'(k) \end{pmatrix}^\dagger e^{+ikx} \right] \quad (455)$$

$$\langle\Psi^\dagger| = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\mathcal{E}_k/\hbar}} \left[b_{k,s}^\dagger \begin{pmatrix} \phi(k) \\ \chi(k) \end{pmatrix}^\dagger e^{+ikx} + c_{k,s} \begin{pmatrix} \phi'(k) \\ \chi'(k) \end{pmatrix} e^{-ikx} \right]. \quad (456)$$

em que $kx = \mathcal{E}t/\hbar - \vec{k} \cdot \vec{r}$

Ao minimizar a ação com a densidade de lagrangiano de Dirac mostrada na Secção **IV A 9** obtém-se a equação de Dirac. Para obter a densidade de hamiltoniano, calcula-se o momento generalizado,

$$\hat{P}_D = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial(\partial_0 \Psi_D)} = i\Psi^\dagger. \quad (457)$$

Com essas expressões obtém-se que a densidade de hamiltoniano pode também ser escrita em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$\hat{H}_D = \hat{P}_D \partial_0 \Psi_D - \mathcal{L}_D = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 \left[b_{k,s}^\dagger b_{k,s} - c_{k,s} c_{k,s}^\dagger \right] \omega \quad (458)$$

- Richard Feynman, Steven Weinberg, *Elementary particles and the law of physics - the 1986 Dirac memorial lectures*, Cambridge University Press, Nova Iorque (1987).
- A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Princeton University Press, Princeton (2003).
- M. Chaichian et al., *Introduction to Gauge Field Theories*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1984).
- Ian J. R. Aitchison, Anthony J. G. Hey, *Gauge theory in particle physics*, CRC Press, 3rd Rev ed. (2002).
- Tim Evans, *The Feynman propagator and Cauchy's theorem*, Imperial College (2018).

V. TEORIA DE TUDO

Após o grande pipôco primordial (“*big bang*”) havia apenas energia e temperaturas inimaginavelmente elevadas. Então deu-se expansão do Universo primordial, o que reduziu a temperatura. Após algum resfriamento inicial surge massa na forma de quarks e léptons. Com a continuação da expansão do Universo, os quarks se uniram para formar os hadrons (prótons e nêutrons) através do processo induzido pela interação forte. O resíduo dessa interação forte proporcionou a ligação entre prótons e nêutrons fazendo surgir o núcleo. Com mais expansão e menor temperatura, a interação eletromagnética possibilitou que prótons atraíssem elétrons formando o hidrogênio. Assim, através da interação eletromagnética surgem os primeiros átomos. Os átomos de hidrogênio então formam átomos de hélio através do processo de fusão nuclear. Passa-se mais tempo e com menores temperaturas a força gravitacional lentamente junta essas nuvens de hidrogênio e hélio que eventualmente sob grande compressão gravitacional acenderam formando as estrelas. A luz emitida é resultado da liberação de energia do processo de fusão nuclear que continua no interior das estrelas. A energia liberada pela fusão nuclear produz uma força expansiva que contrabalança o colapso gravitacional. Então no interior das estrelas surgem os elementos químicos mais pesados, tais como: lítio, carbono, nitrogênio, fósforo, ferro.

Eventualmente a estrela se apaga, esgota-se a fonte de material para fusão nuclear. Ela pode explodir como uma supernova e espalhar elementos químicos pelo Universo que eventualmente podem ser capturados por outras estrelas e possibilita a formação de planetas. A depender da massa inicial da estrela, ela também pode colapsar formando estrela de nêutron ou mesmo buraco negro.

O resíduo da interação eletromagnética é a ligação química que une átomos e possibilita a existência da matéria. A força fraca não é forte o suficiente para possibilitar ligação mas é importante na compreensão da radioatividade ou fissão nuclear. As teorias esboçadas nesse texto une em uma mesma estrutura teórica, a força forte, a força fraca e a força eletromagnética. Com o modelo padrão consegue-se explicar seis quarks, seis léptons, doze partículas transportadora de força: 8 glúons, fóton, bóson W e bóson Z e o bóson de Higgs. Apesar do enorme sucesso, o modelo padrão apresenta diversas deficiências:

- Não explica a quantização da carga,
- Não explica os valores para as massas das partículas,
- Não explica a massa do neutrino,
- Não explica a matéria escura,
- Não explica porque existe tanta matéria no Universo,
- Não explica porque existe tão pouca anti-matéria no Universo,
- Não explica porque a expansão do universo está acelerando, e
- Não inclui a partícula associada à força da gravidade.

Falta agora incluir a força gravitacional na discussão. Ainda falta a teoria de tudo! Essa teoria deve apresentar uma descrição quântica e relativística para as quatro forças da Natureza. Deseja-se unificar a teoria geral da relatividade com a teoria quântica.

O sucesso da descrição no modelo padrão estimula buscar pela partícula quântica que seja a transportadora da força gravitacional. Essa partícula foi batizada de **graviton**. O objetivo é a combinação do modelo padrão com gravitação dentro de uma única estrutura teórica que seja quântica e relativística. A estrutura teórica deve ser capaz de descrever

todas partículas e anti-partículas associadas. Assim como os transportadores da interação da força eletromagnética, da força fraca, da força forte e da força gravitacional.

- Partículas ou entes quânticos ou fontes elementares de interação:
 - Quarks: *up* (u), *down* (d), *strange* (s), *charm* (c), *bottom* (b) e *top* (t).
 - Léptons: elétron, muon, tau e três neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ).
- Partículas ou entes quânticos que transportam interação:
 - Força eletromagnética: fóton (γ).
 - Força fraca: boson (W^+), boson (W^-), boson (Z^0).
 - Força forte: 8 sabores de gluon (g) com carga de cor (r, g, b) e anticor ($\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$).
 - Força gravitacional: graviton.

Uma candidata à teoria de tudo é a teoria da corda. A primeira proposta de usar um objeto unidimensional ao invés de um objeto zero dimensional para descrever a partícula fundamental ocorreu ainda na década de 1960 para tentar compreender a força forte. Nessa primeira proposta da teoria da corda a interação era apresentada como uma estrutura unidimensional, batizada como **corda**. No entanto, essa tentativa foi deixada de lado com o sucesso da cromodinâmica quântica que se encaixa dentro da receita do modelo padrão.

A partir da década de 1970, a teoria da corda foi retomada com o objetivo de resolver o problema da gravitação quântica, i.e., combinar teoria quântica com gravidade (relatividade geral). Uma tarefa que se tem mostrado bastante complexa.

As partículas fundamentais da Natureza passam a ser estruturas lineares e não estruturas pontuais. As linhas ou cordas podem ser fechadas ou abertas, como ilustrado na Figura 7. A corda apresenta massa e pode ter carga. Como a corda é extremamente pequena quando comparada com objetos tradicionais do espaço-tempo, ela é percebida como um objeto pontual. Certamente a questão é se o lépton ou o quark tem alguma estrutura interna, como o átomo que parecia pontual e foi depois comprovado experimentalmente que ele tem uma complexa estrutura interna. No entanto, as técnicas experimentais atuais não possibilitam acessar esse nível de estrutura interna.

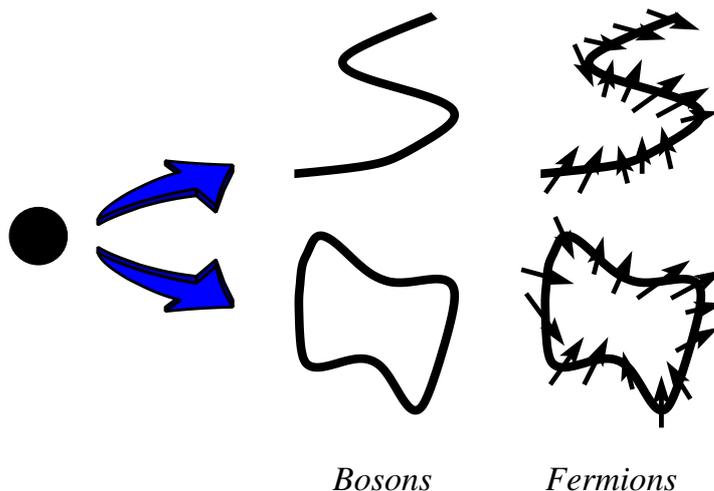


FIG. 7. A partícula na teoria da corda pode ser uma linha aberta ou fechada.

A partícula deixa de ser pontual ou zero-dimensional e passa a ser descrita como uma linha ou objeto unidimensional.

Essa teoria se inspira na estratégia desenvolvida por Theodor Kaluza de acrescentar dimensões para incluir a força gravitacional. Assim, acrescenta-se dimensões extras para combinar gravitação com as três forças do modelo padrão. Nesse contexto Ψ na busca pela teoria de tudo passa a ter $N > 4$ dimensões como inicialmente proposto na teoria de Kaluza-Klein. Em alguns modelos os campos associados à força forte e à força eletrofraca estão contidas no espaço quadridimensional enquanto gravitação pode propagar em seis dimensões adicionais, i.e., o espaço-tempo teria 10 dimensões. Em outros modelos os campos podem existir em todas as dimensões enquanto os objetos macroscópicos é que existiriam apenas no espaço quadridimensional. De qualquer forma até o presente momento todas as dimensões extras são como artifício matemático, nenhuma foi detectada.

Inicialmente foi desenvolvida a teoria da corda para bósons com $D = 25$ dimensões. A corda que descreve bósons é uma linha no espaço-tempo, como ilustrado na Figura 7. Na teorias da corda para férmions o espaço-tempo tem 10 dimensões, $D = 10$. A corda que descreve férmions é a combinação de uma linha com um campo no espaço-tempo, como ilustrado na Figura 7. Como o campo fermiônico só pode ter um valor em cada ponto do espaço-tempo, duas cordas com campo fermiônico não podem estar no mesmo estado ou posição do espaço-tempo. Como sugerido na teoria de Kaluza-Klein quatro dimensões são observáveis e seis dimensões extras estão compactadas.

- Y. Nambu, *Quark model and the factorization of the Veneziano amplitude*, In R. Chand (ed.), *Symmetries and Quark Models: Proceedings of the International Conference held at Wayne State University, Detroit, Michigan (1969)*.
- H. B. Nielsen, *An almost physical interpretation of the dual N point function*, Nordita preprint (1969).
- Leonard Susskind, *Structure of hadrons implied by duality*. *Physical Review D*. 1 (4): 1182-1186 (1970).
- T. Eguchi, K. Nishijima (ed.), *Broken Symmetry: Selected Papers of Y. Nambu*, World Scientific in 20th Century Physics (1995).
- John H. Schwarz, *String theory: the early years*, Symposium for L. Susskind's 60th Birthday, arXiv:hep-th/0007118 (2000).

A. Ação da corda

No espaço quadridimensional de Minkowski a corda gera uma superfície ao propagar de uma posição do espaço-tempo para outra. A ação associada é escrita em termos da superfície existencial criada pela corda ao propagar no espaço-tempo. De acordo com a Equação 263 apresentada na Seção III K 2, para a corda relativística tem-se a ação de Yoichiro Nambu (1921-2015) e Tetsuo Goto (1950-2018),

$$S_{NG} = \int \mathcal{L} dA = -\frac{T}{c} \int \sqrt{-g} dA \quad (459)$$

em que dA é o elemento de área da superfície existencial.

Note-se que a tensão na corda é o mesmo que a energia por unidade de comprimento e portanto é equivalente à massa por unidade de comprimento em unidades em que $c = 1$. Essa é uma ação relativística que não está quantizada. Para realizar a quantização primeiro é obtido o elemento de área em termos das coordenadas que então são transformadas em campos, i.e., operadores.

1. Área da superfície existencial da corda

Para ajudar na compreensão considera-se por simplicidade a superfície existencial embutida em um sub-espaço tridimensional. Utiliza-se o produto externo, \wedge , para calcular o elemento de área.

$$\int f(X) dA = \int f(X(\tau, \sigma)) \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau} \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right\| d\tau d\sigma \quad (460)$$

em que $dA = Jd\tau d\sigma$.

Para obter o elemento de área na superfície em que $X(\tau, \sigma) = (\tau, \sigma, g(\tau, \sigma))$ é a parametrização da mesma.

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}(\tau, \sigma, g(\tau, \sigma)) = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) \quad (461)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma}(\tau, \sigma, g(\tau, \sigma)) = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) \quad (462)$$

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \tau} \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right\| = \left\| \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial \tau}\right) \wedge \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial \sigma}\right) \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (463)$$

Como exemplo para a parte superior da casca esférica de raio R , tem-se que os pontos na superfície satisfazem a equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,

$$dA = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta \quad (464)$$

em que $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$.

$$\int dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\theta = -2\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^R = 2\pi R^2 \quad (465)$$

Outra maneira de calcular o elemento de área é pela expressão do módulo do produto externo. Essa alternativa possibilita obter uma expressão mais geral para o elemento de área. Considere-se a imagem de dois vetores associados aos gradientes na superfície-existencial descrita matematicamente por X . Eles formam o ângulo α entre si, conforme indicado na Figura 8. No caso geral não é necessário utilizar o conceito de ângulo. Como se pode observar na figura, pode-se calcular o elemento de área,

$$dA = \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} d\tau^0 \wedge \frac{\partial X}{\partial \tau^1} d\tau^1 \right\| \quad (466)$$

$$= \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} \right\| \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right\| \sin \alpha d\tau^0 d\tau^1 \quad (467)$$

$$= \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} \right\| \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right\| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} d\tau^0 d\tau^1 \quad (468)$$

$$= \sqrt{\left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right\|^2} \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau^0} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau^1}\right)^2}{\left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right\|^2}} d\tau^0 d\tau^1 \quad (469)$$

$$= \sqrt{\left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right\|^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau^0} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau^1}\right)^2} d\tau^0 d\tau^1 \quad (470)$$

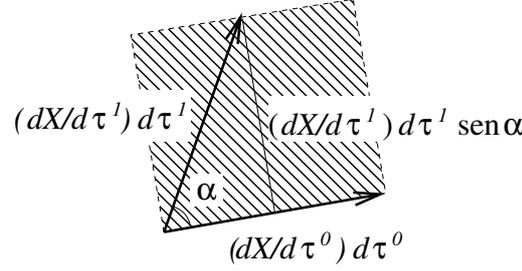


FIG. 8. Elemento de área da superfície-existencial.

Esses resultados são equivalentes. Para o caso 3D pode-se mostrar facilmente a equivalência entre os dois resultados obtidos.

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right\|^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau^0} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right)^2 = \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial \tau^0} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial \tau^1} \right)^2 \right) - \left(\frac{\partial g}{\partial \tau^0} \frac{\partial g}{\partial \tau^1} \right)^2 \quad (471)$$

$$= 1 + \left(\frac{\partial g}{\partial \tau^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \tau^1} \right)^2 \quad (472)$$

Para o espaço-tempo quadridimensional foi definido,

$$g_{\mu\nu} = J_{\mu}^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} J_{\nu}^{\beta} \quad (473)$$

Define-se o tensor métrico auxiliar na hipersuperfície ou superfície existencial,

$$h_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau^{\alpha}} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \tau^{\beta}} \implies \begin{pmatrix} \dot{X} \cdot \dot{X} & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & X' \cdot X' \end{pmatrix} \quad (474)$$

em que $\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau^0} = \frac{\partial X}{\partial \tau}$ e $X' = \frac{\partial X}{\partial \tau^1} = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$

Esse tensor métrico auxiliar ou induzido é utilizado para obter distâncias entre pontos na corda.

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} d\sigma^{\alpha} d\sigma^{\beta} \quad (475)$$

Determinante,

$$h = \det\{h_{\alpha\beta}\} = \dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^0} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right\|^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau^0} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau^1} \right)^2 \quad (476)$$

Então pode-se escrever o elemento de área da superfície-existencial,

$$dA = \sqrt{h} d\tau^0 d\tau^1. \quad (477)$$

Assim obtém-se a ação de Nambu-Goto em termos de um sistema de coordenadas para que se possa realizar cálculos no hiperespaço relativístico mas não ainda quantizado.

$$S_{NG} = \int \mathcal{L} dA \quad (478)$$

$$= -\frac{T}{c} \int \sqrt{-g} \sqrt{h} d\tau^0 d\tau^1 \quad (479)$$

$$= -\frac{T}{c} \int \sqrt{-g} \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2} d\tau^0 d\tau^1 \quad (480)$$

Para generalizar para o espaço-tempo de D dimensões examina-se a posição de um ponto da superfície-existencial no espaço D -dimensional descrita pela função,

$$X(\tau^0, \tau^1) = X(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)) \quad (481)$$

em que d é a quantidade de coordenadas espaciais e $D = d + 1$.

Generaliza-se o conceito de membrana como uma hipersuperfície de dimensão $p < d$. Essa hipersuperfície de dimensão p é denominada de **p-brana**. De maneira que uma membrana é uma 2-brana, a corda é uma 1-brana e uma partícula pontual é uma 0-brana. A corda é uma 1-brana que ao evoluir no espaço-tempo de dimensão D forma uma 2-brana.

A corda pode ser fechada ou aberta. Para a corda fechada existe L_C tal que $X(\tau, \sigma) = X(\tau, \sigma + L_C)$. Para a corda aberta é necessário impor uma condição de contorno na extremidade da corda. A condição de contorno pode ser do tipo Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) em que se define o valor de $X(\tau^0, \tau^1)$ na extremidade da corda para cada coordenada X^μ . Assume-se que a corda aberta termina em uma hipersuperfície denominada como a brana de Dirichlet ou D-brana. Se a condição de contorno for do tipo Carl Gottfried Neumann (1832 - 1925), em que se define o valor da derivada nas extremidades, a corda não está conectada a uma hipersuperfície.

B. Quantização da corda

A teoria quântica da corda requer a teoria geral da relatividade para ser construída. Assim tem-se as seguintes características:

- Incorpora a teoria geral da relatividade.
- Incorpora o modelo padrão com o grupo $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ para descrever todas as partículas fundamentais.
- Apresenta supersimetria local para incorporar a simetria que relaciona férmions e bósons. Assim o nome da teoria da corda com supersimetria é teoria da supercorda. Mas para efeitos desse texto, escreve-se teoria da corda e subentende-se que se está abordando a teoria da supercorda. É importante salientar que não existe evidência experimental que supersimetria seja de fato uma simetria da Natureza.
- Prevê a quantidade de dimensões extras necessárias para obter uma descrição consistente, i.e., para não apresentar anomalias.

Para realizar a quantização da corda é desejável que a ação seja uma função polinomial do campo e suas derivadas. A dificuldade com a ação de Nambu-Goto na Equação 480 é a presença da raiz quadrada, que dificulta a análise algébrica da ação. Para realizar a quantização Alexander Markovich Polyakov utilizou um lagrangiano modificado que não contem a raiz quadrada.

$$S_P = -\frac{T}{2c} \int h^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu(\tau, \sigma) \partial_\beta X^\nu(\tau, \sigma) \sqrt{-h} d\tau d\sigma \quad (482)$$

em que T é a energia por unidade de volume, $h_{\alpha\beta}$ é a métrica auxiliar na superfície existencial e $h^{\alpha\beta} = \mathbf{inv}(h_{\alpha\beta})$.

No limite clássico pode-se mostrar que o lagrangiano de Alexander Markovich Polyakov e de Yoichiro Nambu - Tetsuo Goto são equivalentes. Para examinar essa equivalência considere-se a corda com superfície existencial descrita por $X(\tau^0, \tau^1)$ como na Equação 481.

$$X(\tau^0, \tau^1) = (X^0(\tau^0, \tau^1), X^1(\tau^0, \tau^1), X^2(\tau^0, \tau^1), \dots, X^d(\tau^0, \tau^1)) \quad (483)$$

O módulo do produto externo generalizado por ser escrito como a raiz quadrada de uma soma.

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \tau_0} \wedge \frac{\partial X}{\partial \tau_1} \right\| = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^1} - \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^1} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^0} \right)^2} \quad (484)$$

Observe-se que o argumento da raiz quadrada é uma soma para todo μ e ν . Divide-se por 2 pois cada elemento ao quadrado aparece duas vezes na soma. Para simplificar a expressão define-se a matriz Σ e seu determinante, $\Sigma^{\mu\nu}$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^0} & \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^1} \\ \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^0} & \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^1} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{det}\{\Sigma\} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^1} - \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^1} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^0} = \Sigma^{\mu\nu} \quad (485)$$

$$dA = \sqrt{\frac{1}{2} |\Sigma^{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}|} d\tau^0 d\tau^1 \quad (486)$$

Obtem-se expressão análoga ao da Equação 470.

$$\frac{1}{2} \Sigma^{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^0} \right)^2 \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^1} \right)^2 - \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^1} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^1} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau^0} \quad (487)$$

$$= \left\| \frac{\partial X(\tau^0, \tau^1)}{\partial \tau^0} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X(\tau^0, \tau^1)}{\partial \tau^1} \right\|^2 - \left(\frac{\partial X(\tau^0, \tau^1)}{\partial \tau^0} \cdot \frac{\partial X(\tau^0, \tau^1)}{\partial \tau^1} \right)^2. \quad (488)$$

Finalmente obtem-se a ação de Nambu-Goto no hiperespaço D -dimensional.

$$S_{NG} = -\frac{T}{c} \int \sqrt{(\partial_{\tau_0} X^\mu)^2 (\partial_{\tau_1} X^\nu)^2 - (\partial_{\tau_0} X^\mu \partial_{\tau_1} X^\mu)^2} d\tau_0 d\tau_1 \quad (489)$$

Para a métrica induzida $h_{\alpha\beta}(\tau_0, \tau_1) = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\mu$, escreve-se a ação de Nambu-Goto

$$S = -\frac{T}{c} \int \sqrt{h} d\tau_0 d\tau_1 \quad (490)$$

Como mencionado anteriormente essa ação apresenta dificuldade para a quantização devido a presença do operador raiz quadrada. Assim, deseja-se encontrar uma descrição em que $(\partial_{\tau_0} X^\mu)^2 = 0$ e $(\partial_{\tau_1} X^\nu)^2 = 0$. Essas condições informam que se busca $ds^2 = 0$, o que ocorre no cone de luz ($c^2 dt^2 - dx^2 = 0$). Considere-se as coordenadas σ_+, σ_- sobre o cone de luz em que a métrica apresenta valor nulo, *id est*,

$$(\partial_{\sigma_+} X^\mu)^2 = (\partial_{\sigma_-} X^\mu)^2 = 0. \quad (491)$$

Faz-se a mudança de coordenadas para obter a ação,

$$S = \frac{T}{c} \int \partial_{\sigma_+} X^\mu \partial_{\sigma_-} X^\mu d\sigma^+ d\sigma^-. \quad (492)$$

Para a métrica induzida $h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\mu$, escreve-se a ação de Polyakov

$$S_P = -\frac{T}{2c} \int h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\mu \sqrt{h} d^2\sigma \quad (493)$$

Para mostrar a equivalência classicamente utiliza-se a equação de Euler-Lagrange para $h^{\alpha\beta}$ para eliminar essa grandeza da ação e obter a ação de Nambu-Goto. Tanto a ação de Polyakov com a ação de Nambu-Goto estão associadas a campos livres, i.e., a interação não foi incluída.

O primeiro passo do processo de quantização é substituir as funções por operadores ou campo.

$$X \rightarrow \hat{X} \quad (494)$$

Então define-se as regras de comutação para as grandezas dinâmicas.

$$[X^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')] = 0 \quad (495)$$

$$[P^\mu(\sigma), P^\nu(\sigma')] = 0 \quad (496)$$

$$[X^\mu(\sigma), P^\nu(\sigma')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma') \quad (497)$$

Com base na análise de anomalias (falhas de simetria) é que se conclui que apenas o grupo de Lie ortogonal especial $SO(32)$ e o grupo de Lie simples excepcional $E_8 \times E_8$ são capazes de incorporar o modelo padrão e resultar em uma teoria consistente. Assim, na teoria de supercordas tem-se apenas dois tipos de simetria local: $SO(32)$ e $E_8 \otimes E_8$. Para combinar a teoria da relatividade geral com a teoria quântica, além de supergravidade em 11 dimensões, como ilustrado na Figura 9, cinco teorias de corda foram desenvolvidas. Tem-se modos que propagam para a esquerda e modos que propagam para a direita. São cinco teorias de corda em 10 dimensões que diferem pela maneira como a supersimetria opera sobre a corda ou se contem cordas abertas ou fechadas.

- Tipo I (supercorda) - contém corda aberta e fechada. Na corda aberta a carga é posicionada na extremidade e na corda fechada a carga é distribuída. Essa teoria utiliza o grupo de Lie $SO(32)$ para cancelar as anomalias e foi proposta por Michael Boris Green (1946-) e John Henry Schwarz (1941-) em 1984. Apresenta 26 dimensões.
- Tipo IIA (supercorda) - contém apenas corda fechada orientada híbrida entre supercorda e corda bosônica. Tem-se 32 supercargas. Apresenta 10 dimensões.
- Tipo IIB (supercorda) - contém apenas corda fechada orientada híbrida entre supercorda e corda bosônica. Tem-se 32 supercargas. Apresenta 10 dimensões.
- Heterotica (heterosis ou híbrida) $SO(32)$ - contém apenas corda fechada orientada híbrida entre supercorda e corda bosônica. Modos que propagam para a esquerda (26 dimensões) e que propagam para à direita (10 dimensões). Apresenta 10 dimensões.
- Heterotica (heterosis ou híbrida) $E_8 \otimes E_8$ - contém apenas corda fechada orientada híbrida entre supercorda e corda bosônica. Modos que propagam para a esquerda (26 dimensões) e que propagam para à direita (10 dimensões). Apresenta 10 dimensões.

O grupo $SO(32)$ tem $32^2 - 1$ geradores e o grupo E_8 tem 248 geradores. Em 10 dimensões o spinor apresenta 16 componentes ou supercargas.

- Gerard 't Hooft, *Introduction to string theory*, Lecture notes 2003 and 2004, Institute for Theoretical Physics, Utrecht, the Netherlands, 79 páginas (2004).

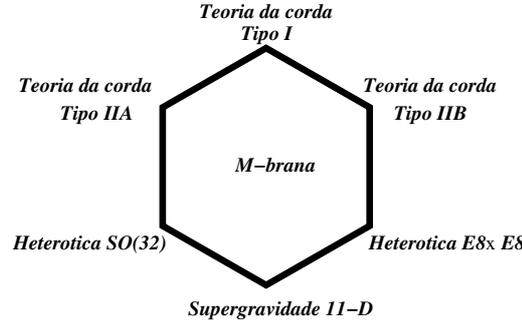


FIG. 9. Teorias de tudo em 11 dimensões.

C. Teoria de campo conforme e espaço anti de Sitter

A transformação conforme no espaço euclidiano facilita a obtenção da solução em vários problemas de ciência e tecnologia. Em particular, tem diversas aplicações em eletromagnetismo. A teoria de campo que apresenta simetria conforme (CFT, *Conformal Field Theory*) é invariante por uma transformação conforme. Com a técnica da transformação conforme é possível resolver de maneira exata alguns tipos de teoria de campo com interação. Em teoria da corda utiliza-se a transformação conforme em espaço multidimensional. No entanto, essa classe de teoria de campo tem aplicação que vai além da teoria da corda.

Em uma transformação conforme pode-se ter dilatação da escala, i.e., as distâncias variam, mas não se tem alteração dos ângulos. Ela pode ser global ou local. A translação é um exemplo de transformação conforme global, i.e., o pano de fundo é fixo. Na transformação conforme local, i.e., o pano de fundo é dinâmico, o fator de escala depende da posição. A transformação conforme das coordenadas $X^\mu \rightarrow \tilde{X}^\mu$ gera uma mudança na métrica,

$$ds^2 \rightarrow \Omega^2(X) ds^2 \quad (498)$$

ou

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(X) g_{\mu\nu}. \quad (499)$$

Pode-se também aplicar a transformação conforme na métrica induzida.

$$h_{\alpha\beta} = \Omega^2(\sigma, \tau) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad (500)$$

É importante salientar que o fato desse tipo de teoria não ser sensível à escala significa que a interação não pode apresentar massa. Não se tem comprimentos pré-definidos, como o comprimento de Arthur Holly Compton (1892 - 1962) ou o raio de Karl Schwarzschild (1873-1916) ou o comprimento de Max K. E. L. Planck (1858-1947). Para distâncias menores que o comprimento de Compton pode ocorrer criação de entes quânticos e portanto a teoria do campo quântico é necessária.

- Comprimento de A. Compton do elétron: $l_{Compton} = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \times 10^{-12}$ m.
- Comprimento de M. Planck: $l_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,62 \times 10^{-35}$ m.
- Raio de K. Schwarzschild do Sol: $r_S = \frac{2GM_{Sol}}{c^2} = 3000$ m.

Tem-se também a massa de M. Planck em que o comprimento de A. Compton e o raio de K. Schwarzschild são iguais.

O espaço-tempo é um caso particular de variedade matemática, i.e., um espaço topológico que em cada ponto pode ser aproximado por um espaço euclidiano. Para efeitos práticos ele essencialmente plano. Um caso particular de interesse para a teoria geral da relatividade são os espaços curvos. Por exemplo, a casca esférica é um exemplo de superfície curva com curvatura constante positiva.

O espaço anti Willem de Sitter (1872-1934), AdS , é uma variedade lorentziana maximamente simétrica com curvatura constante negativa. No caso bidimensional tem-se o plano hiperbólico como exemplo de curvatura constante negativa enquanto a casca esférica é exemplo de curvatura constante positiva. A generalização para qualquer dimensão diz-se que é de Sitter quando apresenta curvatura constante positiva e anti de Sitter quando apresenta curvatura constante negativa. Espaço anti de Sitter de dimensão N é denominado AdS_N . Esse tipo de espaço é utilizado em teorias de gravitação quântica. Pode-se combinar espaços para formar variedades mais complexas. Por exemplo, pode-se combinar o espaço anti de Sitter, AdS_N , que é uma variedade não-compacta e a hipersfera, S^N , que é uma variedade compacta.

$$AdS_N \otimes S^N \quad (501)$$

Nesse caso a métrica composta tem um setor anti de Sitter e outro setor hipersférico.

$$ds^2 = ds_{AdS_N}^2 + ds_{S^N}^2 \quad (502)$$

Observa-se que existe uma correspondência entre as teorias de gravitação quântica no espaço AdS e teorias de campo quântico com invariância conforme. Essa dualidade é denominada correspondência AdS/CFT ou simplesmente AdS/CFT . Esse conceito também é conhecido como dualidade calibre/gravidade ou princípio holográfico. Esse resultado é surpreendente e muito interessante apesar de não vivermos em espaço-tempo de curvatura negativa.

- Existe um mapeamento entre a teoria da corda e a teoria de campo não-gravitacional.
- AdS/CFT é uma dualidade de acoplamento do tipo forte-frac. Uma teoria de calibre fortemente acoplada é dual de uma teoria da corda fracamente acoplada.
- O mapeamento AdS/CFT é holográfico.

Essa dualidade foi proposta e demonstrada em 1997 por Juan Martín Maldacena (1968-) e é conhecida como conjectura de J. Maldacena ou dualidade gravidade-calibre.

Teoria da corda em $Ad_5 \otimes S^5 \Leftrightarrow \mathcal{N} = 4$, teoria de calibre $SU(N)$ no espaço quadridimensional.

Pode-se generalizar para apresentar a dualidade como uma correspondência entre a teoria gravitacional em $AdS_{d+1} \otimes$ Variedade compacta e a teoria de campo com invariância conforme em d dimensões. Certamente a conjectura da dualidade é questionada. Ainda não é um teorema, mas tem sobrevivido aos testes.

Um outro aspecto é que esse tipo de ferramenta tem encontrado aplicação em outras áreas.

- AdS/QCD - utiliza-se conceitos da dualidade AdS/CFT para compreender e realizar cálculos na teoria da força forte - cromodinâmica quântica. O confinamento de quarks em um hadron indica que eles estão conectados por um tubo de fluxo cujos limites ou extremos são as posições dos quarks. A dualidade ajuda a compreender o confinamento.

- *AdS/CMT* - sistemas fortemente acoplado ou correlacionado em matéria condensada de maneira a transformr o sistema em um fracamente acoplado ou correlacionado. Esse estudo pode ajudar encontrar novas fases da matéria.
- Dinâmica de fluido - pode-se obter a partir da equação da teoria geral da relatividade as equações de Navier-Stokes de um fluido no espaço-tempo quadridimensional. Pode-se também usar a ferramenta para compreender turbulência em fluidos. Esse resultado é conhecido como correspondência fluido - gravidade.
- Conexão entre geometria e entrelaçamento quântico.
- Turbulência.
- Novos tipos de buraco negro.
- Gravitação quântica.
- Monopolo magnético.

Para fazer uma analogia elementar é como trocar uma integral de volume por uma integral de superfície. O problema tridimensional é substituído por um problema bidimensional que representa a fronteira do problema original mas oferece o mesmo resultado. Uma melhor analogia é a holografia quando uma se obtém uma representação bidimensional de um objeto tridimensional, i.e., grava-se a frente de onda em uma superfície ou casca que envolve um objeto tridimensional. Essa casca com o registro contém informação tridimensional.

Outro aspecto interessante é que a escala de energia necessária para examinar todas as consequências e previsões é inalcançável com os instrumentos a disposição na Terra, inclusive o mais energético dos aceleradores de partículas. Assim tem sido os buracos negros que têm oferecido um caminho para testar todos esses novos modelos teóricos.

- David Tong, *Lectures notes on string theory*, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge.
- Joseph Polchinski, *What is string theory?*, arXiv:hep-th/9411028 (1994).
- Veronika E. Hubeny, *The AdS/CFT Correspondence*, arXiv:1501.00007 (2015).

D. Teoria M

No estudo a teoria de corda observa-se diversos tipos de dualidades que relacionam diferentes teorias de corda e sugere que as diversas teorias de corda são aspectos de uma mesma teoria subjacente.

- Dualidade T - uma direção compacta de dimensão R é semelhante a direção compacta de dimensão l_c^2/R . Exemplo: relaciona Tipo II e Heterótica.

$$R \leftrightarrow l_c^2/R$$

- Dualidade S - relaciona a constante de acoplamento. Exemplo: relaciona Tipo I e Heterótica $SO(32)$, relaciona Tipo IIB com ela mesma (simetria).

$$g_c \leftrightarrow 1/g_c$$

Observa-se que se aumentar uma dimensão, de maneira que $D = 11$, i.e., são 10 dimensões espaciais e 1 dimensão temporal, obtém-se um objeto fundamental que deixa de ser a corda e passa a ser a **brana**. Assim, 0-brana é uma partícula pontual no espaço tempo de pelo menos $0 + 1$ dimensão. 2-brana é uma superfície no espaço tempo de pelo menos $2 + 1$ dimensões. Uma 2-brana é semelhante a uma **membrana**. Uma p -brana é um objeto com p dimensões espaciais contida no espaço de pelo menos $p + 1$ dimensões. considere-se a variedade diferencial \mathcal{W} contida no espaço de $p + 1$ dimensões. Matematicamente tem-se o mapeamento dessa variedade diferencial \mathcal{W} no espaço-tempo \mathcal{M} no qual a brana se propaga.

$$\phi : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{M} \quad (503)$$

em que ϕ descreve a história da brana.

Nesse contexto $\phi(\mathcal{W})$ é o volume existencial (*world-volume*) da brana. Examine-se a Equação 177 e Equação 263. Para a partícula de massa m que se move no espaço-tempo \mathcal{M} e interage através da carga e .

$$S_{part} = \int_{\mathcal{W}} m ds + \int_{\mathcal{W}} e \phi^*(A) \quad (504)$$

Se T é a tensão na brana escreve-se a ação associada à brana,

$$S_{brana} = \int_{\mathcal{W}} TVol(\phi^*(g)) + \int_{\mathcal{W}} \epsilon_q \phi^*(C) \quad (505)$$

em que ϵ_q é a carga e g é a métrica.

Na teoria M busca-se implementar o conceito em que a corda ou brana é fundamental e o espaço-tempo é secundário. Essa nova teoria junta as diferentes teorias de corda em uma mesma estrutura. De maneira que combina-se todas as teorias de corda e a teoria de gravitação. Veja a Figura 9 adaptada da referência¹. A brana pode significar muitas coisas:

- Objeto físico na teoria de campo da gravitação.
- Objeto físico em teoria da corda.
- Solução do tipo sóliton em (super)gravidade e (super)corda.
- Condição de contorno em teoria de campo conforme.
- Categorias de objetos associados a feixes ou raios em variedade algébrica.